

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

#### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + Refrain from automated querying Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

#### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



#### Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

#### Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

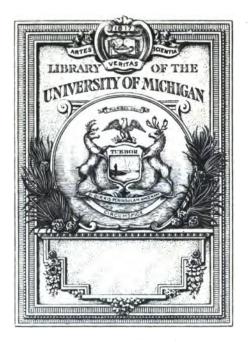
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + Beibehaltung von Google-Markenelementen Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

#### Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter http://books.google.com/durchsuchen.

gm L.



A hugu grading 100

. H2185

•

• . •

# · H. Pamilton's

## System der Regelschnitte

analytisch bargeftellt.

Mus bem Englifchen überfege

V 0 H.

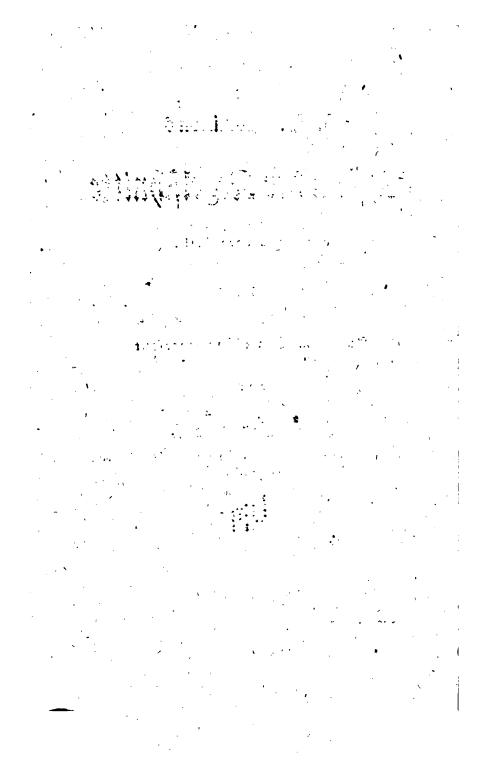
3. K. Bendendorff,

Professor und Oberlehrer am Friedrichs - Werberfchen Commafio ju Berlin.

Mit vier Figurentafeln.

Berlin, 1828,

bei Lubwig Debmigt



Nint of fev. Seibil 1-23-30 22364

## Vorwort des Übersețers.

Das Werk, von bem Borliegendes eine übers fegung ift, hat ben Litel

"An analytical System of conic Sections, designed for the use of students in the university; by the Rev. H. P. Hamilton, M. A. F. R. S. Lond. and Edin. Fellow of Trinity College. Cambridge 1828."

Das Werk hat mehrere gute Eigenschaften, bie es bem Anfanger im Studio der analytischen Geometrie empfehlenswerth machen, seine Kurze und Reichhaltigkeit. Indem der Verfasser sich namlich von allen weitläuftigen Erörterungen fern halt, in die oft felbst bessere Schriftsteller über diesen Gegensstand gerathen, hat er Raum gewonnen für eine Menge von Sägen und Aufgaben, die man in größern Werken vermißt. Dabei folgt der Verfasser einer strengen Ordnung, hat die Sähe gehörig clatssssicht, und hat dadurch seinem Werke die dem Ansfänger so nothwendige übersichtlichkeit gegeben

12-1

Wollte man-es-ihm zum Vorwurfe machen, daß er bei den einzelnen Kurven dieselben Saße wiederholt, und diese nicht lieber unter allgemeinere Gesichtse punkte gebracht hat, so erinnere man sich, daß er für Anfänger schreibt, die so das Einzelne leicht aufsfassen und sich nachher mit größerem Nußen die allgemeinere Ansicht aneignen werden.

Da es ber gegenwartige Stand mathematischer Renntniffe erforbert, ben gur Universitat abgebenben Junglingen wenigstens' eine Borbereitung fur bie analytische Behandlung ber Geometrie mit ju geben, fo balt ber Uberfeger bies Werk, obgleich bem Litel nach fur Universitate Borlefungen bestimmt, benhoch für biefen Zwed geeignet; benn bie haupt-Abschnitte besselben werben sich ohne Schwierigkeit in ber erften Rlaffe ber Symnasien erklaren lassen. 3mar ift ber Uberfeger nicht unbekannt mit ben verbienftlichen Bemubungen beutscher Belehrter in biesem Zweige ber Mathematif: bem ungeachtet aber glaubt er, baß bies Buch, auf beutschen Boben verpflangt, Dugen fliften wirb. Benigstens ift bies bie redliche Abficht, bie ihn ju biefer Arbeit veranlafte, ohne alle thorichte Citelfeit, Die an sich reiche mathematische Literatur ber Deutschen burch eine Ubersegung vermehren zu wollen.

Berlin, im Oftober 1828.

### Vorrede des Verfassers.

er hauptzweck ber vorliegenben Blatter ift bas Studium ber Regetschnitte nach Grundfagen, Die bem gegenwartigen Stande mathematischer Renntniffe ans gemeffen find, ju erleichtern. In einem fruberen Werke hat ber Berfaffer schon eine leichte Stige beffelben Gegenftandes, in Berbindung mit analytis fcher Geometrie, gegeben. Aber nachherige Erfahrung bat ibn belehrt, daß biefe Methobe, Die Regels schnitte zu behandeln, obgleich burch febr ausgezeichs nete Schriftsteller bes Festlandes' fanctionirt, ju mif fenschaftlich, wenn er fo fagen barf, fur ben Glementar-Unterricht ift. Gie ift mangelhaft in ber wesentlichen Eigenschaft ber Einfuchheit, und fest eine arbfiere Bewandtheit in algebraischen Operatios nen voraus, als junge Leute ju der Zeit, wo fie biesen Zweig bes Studiums beginnen, gewöhnlich erreicht haben.

Der Berfaffer hat in diesem, jest vem Publis fum dargebotenen, Werke diesem Einwurfe ju bes gegnen gesucht. Er geht von der Erklarung aus: Ein Regelschnitt sei der Ort eines Puntstes, dessen Entfernungen von einem fosten

Punkte und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie zu einander in einem consstanten Verhältnisse sind. Aus dieser Erklärung, die er Boscopich verdankt, leitet er die Funsdamentals Gleichungen der drei Kurven ab, die unster der gemeinschaftlichen Benennung der Regelsschnitte zusammen gefast werden. Die Form und Eigenschaften derselben werden zunächst durch Hüse dieser Gleichungen aufgesucht, indem jede Kurve, der leichteren Übersicht wegen, in drei Kapiteln abgehandelt wird, je nachdem man sie auf rechtwinklichte, schieswinklichte und Polars Coordinaten bezieht.

Wegen der Verwandtschaft, welche zwischen zweien dieser Kurven, der Ellipse und Hyperbel Statt sindet, können in den meisten Fallen die Eigensschaften der einen aus den correspondirenden der ans dern abgeleitet werden, indem man nur das Vorzeichen eines Buchstaden der Gleichung andert. Da man aber einige Schwierigkeit sinden mögte, die Gesstalt der Hyperbel aus der analogen der Ellipse aufzussinden, so wurde es nicht für ganz überstüssig geshalten, die Eigenschaften beider Kurven abgesondert zu erforschen.

Der Verfasser ist veranlaßt gewesen, eine kurze Einleitung, enthaltend die Gleichung der geraden Linie und des Kreises voran zu schicken zum Besten berjenigen, die noch mit diesem Gegenstande der Analysis unbekannt sind.

Brinity College, Januar 1828.

## Inhalt.

#### Einleitung.

#### Erfes Ranital.

Bon der Lage eines, Puntres.	
Methobe, die Lage eines Punttes ju beftimmen,	\$\$.
(1) in einer geraben Linie	1.
(2) in einer Chene	2.
Ertldrung ber Ausbrade, Gleichung einer Linie und	4.
Ertidrung bes Musbrudes, Polar-Gleichung	5.
3meites Rapitel.	
Bon ber geraben Linke.	`
Form threr Gleichung, wenn bie Agen	
(1) rechtwinklicht	6.
(2) schiefwinklicht flub	7.
Methobe, ben Ort einer unbestimmten Gleichung bes er-	
ften Grades zu confirmiren	10,
(1) burch einen gegebenen Puntt	12.
(2) durch zwei gegebene Punfte	14.
Gleichung einer geraben Linie; melche burch einen gege- benen Bunft gezogen ift und	
(1) narallel su einer gegehenen Linie	47

THE THE PARTY OF T	<b>SS</b> -
(2) fentrecht auf einer gegebenen Linie ift	19.
und (3) mit einer gegebenen Linie einen befannten Bin- fel bilbet	23.
Musbrud får bie Entfernung zweier Puntte burch ibre	
Coordinaten	26.
Coordinaten des Durchschnitispunttes zweier Linien Ausdruck für die Sentrechte von einem gegebenen Puntte	28.
auf eine gerade Linie	30.
Drittes Rapitel.	,
Bom Rreife.	
Seine Gleichung, wenn ber Anfang ber Coerbinaten if,	
(1) der Mittelpunft des Rreifes,	•
(2) der Endpunft eines Diameters,	
(3) irgend ein Puntt in ber Age ber x und y,	-
(4) irgend ein Punft in ober aufferhalb bes Rreifes 33. u	. 34.
Methabe, den Ort der Gleichung y² + x² + Ay + Bx + C = 0 gu confiruiren .	36.
Den Durchschuftt einer geraben Linie mit bem Rreife ju	37.
Gleichungen der Tangente und Rormale	38.
Methobe, eine Tangente von einem aufferhalb bes Rreifes	00.
gegebenen Puntte an denfelben ju giebn	40.
Von ben Regelschnitten.	
Allgemeine Erfldrung	44.
Eintheilung ber Regelichnitte in brei Arten	45.
Bonber Parabel.	
Erfies Rapitel.	
Non der Parabel, auf ihre Aze bezagen.	
Gleichung ber Parabel	46.
Geftalt ber Pavabel aus ber Gleichung abgefeitet	47.

	SS.
Durchschnitt einer geraben Linie mit ber Parabel	51.
Gleichungen ber Langente und Rormale 52. u.	. <b>3</b> 7.
Methobe, an ble Parabel eine Tangente ju gieben von	
einem Punfte aufferhalb berfelben	<i>5</i> 9.
Gleichung ber Linte, welche Die Berührungspunfte verbindet	60.
Bweites Kapitel. Bon der Parabel, auf den Focus bezogen.	
Ausbrud für bie Entfernung irgend eines Punttes berfel-	<b>6</b> 2
ben vom Hocus	63.
Palar-Gleichung ber Parabel	64.
Die Tangente bildet gleiche Wintel mit bem Focal-Ab- fande und ber ber Mre parallelen Linie	60
	68,
Die Tangente und eine Senfrechte vom focus auf Diefelbe treffen die Age ber y in bemfelben Puntto	69.
3mei Linien vom Focus, eine nach dem Berührungspunfte	ug.
und die andere nach dem Durchschnitt ber Tangente	
mit ber Directrig, find fentrecht auf einander	70.
Drittes Kapitel.	
Bon ber Parabel, auf irgend einen Diameter bezogen.	, i - <del>-</del>
Den Ort ber Mittelpunfte irgend einer Anjahl paralleller	-
Sebnen ift eine gerade Linte und beift ein Durchmeffer	71.
Die Subtaugente wird burch die Kurve halbirt, die Agen	
mbgen rechtwinklicht ober schief fein	80.
Benn von verfchiebenen Punten einer ber Lage nach ge-	· . ·
gebenen Linie Tangenten = Paare an die Parabel gego- gen werden, so geben die Linien, welche die gusam=	
mengehbrigen Berührungspunfte verbinden, alle burch	
denselden Dunkt	82.
Benn wei ber Lage nach gegebene Linien fich inner- ober	-
aufferhalb ber Parabel schneiben, fo find bie Rechtede	
aus ben Abichnitten betfelben in einem conftanten	
Berhältniffe	84.
Biertes Pabifel : 19 10 3	•

Biertes Kubile) Bermijahie Sipe.

#### Bonder Ellipfe.

### Grftes Rapitel.

Bon ber Ellipfe, auf ihre Agen bezogen.	cc
Gleichung ber Ellipfe, wenn ber Anfangspuntt liegt	<b>\$\$</b> .
(1) im Scheirel ber großen Age	<b>89.</b>
(2) im Mittelpunfte	92.
Beftalt ber Ellipse, abgeleitet aus ber Gleichung	96.
In melchem Falle bie Ellipse jur Parabel wirb	100.
Durchschnitt einer geraden Linie mit ber Ellipse	101.
Steady and Sungained in the state of the sta	103.
Durchschmitt ber Tangente mit ben Agen	104,
Gleichung ber Rormale	107.
Methobe, eine Langente an die Ellpfe von einem Puntte	
molles dans and factors for booking a feet of the feet	109.
Gleichung ber Linie, welche die Berührungspuntte verbindet	114
Zweites Kapitel.	
Bon ber Ellipfe, auf ben Focus begogen.	
Ausbruck fur die Entfernung irgend eines Punttes ber- felben vom Bocus	112.
Ort einen Punites, beffen Entfernungen von zwei feften Puniten jufammen genommen = 2a find	114.
Dolar-Gleichung ber Ellipse	
(1) wenn ein Focus der Pol	115.
(2) wenn ber Mittelpuntt ber Pol ift	119.
Die Orene - makenae andere Brende -	120.
Ort der Punfte, in welchen eine Senfrechte aus dem Fo- cus die Tangente schneidet	121.
Das Rechted aus ben Sentrechten von einem und bem andern Focus auf die Tangente ift gleich dem Quadrate	
der halben fleinen Are	122,
Ad Drittes Rapitel With Late	
Bon der Ellipfe, guf frgend, ein Spffem conjugirter Diameter bejagen.	-

Erfer Mbichnitt. Bon conjugitten Diametern	
im Allgemeinen.	
Der Ort ber Mittelpunkte irgend einer Anjahl paralleler	
Sehnen ift eine gerade Linie und heift Diameter Gleichung für Die Ordinaten irgend eines Diameters	123. 125.
Conjugirte Diameter	. 127.
Gleichung für ein Spftem conjugirter Diameter	. 129.
Die Agen find bie einzigen conjugirten Diameter, welch	
fentrecht auf einander fein tonnen	. 131.
Gleichung ber Ellipfe, bezogen auf ein Spftem conjugirte	•
Diameter	. 139.
Durchschnitt ber Tangente mit irgend swei conjugirtet	
Benn von verschiedenen Puntten einer ber lage nach ge	. 187.
gebenen Linje Tangenten- Paare an Die Ellipfe gejo	
gen werben, fo werben bie Linien, welche bie gufam	· ,
mengehbrigen Berührungspunfte verbinden, alle burd	
benfelben Punft gebn	. 138.
ner- ober aufferhalb ber Elipfe schneiben, so find bi Rechtede aus ben Abschnitten berfelben in einem con	e
fanten Berhaltniffe	. 141.
3weiter Abschnitt. Bon ben Eigenschaften con jugirter Diameter.	<b>:</b>
Die Summen ber Quabrate irgend zweier conjugirte Diameter ift gleich ber Summe ber Quabrate be	
Agen	. 143.
Der Inhalt umschriebener Parallelsgramme, beren Seite parallel ju einem Spfteme conjugirter Diameter fin	
ift conflant	. 144.
Gleiche conjugirte Durchmeffer	. 147.
Bon allen Spftemen conjugirter Durchmeffer find b fenfrechten die fleinften, und die gleichen die großefte	n 149.
Das Rechted aus ben Focalabftanden ift gleich dem Qu brate bes jugeborigen halben conjugirten Diameters	

	<b>SS.</b>
Benn eine Tangente an P ber CA, CB in T und : be-	<b>43.</b>
	151.
Bemt eine Tangente an P, Tangenten an A, a in T, t begegnet, fo ift AT . at = BC2	<b>15</b> 3,
Dritter Abichnitt. Bon Supplementar-Sehnen.	
Gleichungen fur irgend zwei Supplementar - Sehnen	155.
3mel Diameter parallel ju trgend zwei Supplementar-	
Sehnen find confugirte	157.
Hiernach' fann man ziehn	
(1) einen Diameter, ber conjugirt ju einem gegebenen ift	
(2) eine Tangente an einen gegebenen Punft	159.
Ausbruck für die Tangente Des Bintels, Den zwei Saupt- Supplementar-Sebnen bilben	160.
Anglytifche und geometrifche Methobe, swei coningirte Dla-	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
meter gu glebn, die einen gegebenen Bintel bilben	
follen	164.
Biertes Rapitel.	
Vermischte Sate.	,
Methobe, ben Mittelpunft und bie Agen einer Glipfe gu	
finden	165.
Ellipsen = Birtel	168.
Aufgaben	-171.
Bonber Hyperbel.	
Erfies Rapitel.	
Bon ber Syperbel, auf ihre Agen bezogen.	. 1
Gleichung ber Spperbel, wenn ber Anfangspunft liegt	
(1) im Scheitel ber Querage	174.
(2) im Mittelpuntte	175.
curatescalates about restreminfiteite Sunerhel	178.

Gleichung ber Spperbel, abgeleitet aus ber ber Ellipfe,	<b>55.</b>
indem man b in bles verwandelt	179.
Gefialt ber Sperbel, aus ber Gleichung abgeleitet	180.
Conjugirte Sprerbel	183.
In welchem Falle bie Opperbel eine Patabel wirb	184.
Durchfchnitt einer geraben Linie mit ber Sppewel	185.
Gleichung der Tangente	-
Durchschnitt ber Tangente mit ben Men	188.
Gleichung ber Rormale	190.
Methodo, eine Tangente an die Spperbel ju giebn von	2500
einem aufferhalb berfelben gegebenen Puntte	192.
Gleichung ber Linie, welche Die Berahrungspuntte ber-	
biniet	193.
3meites Rapttel.	
Bon ber Opperbel, auf ben Foeus bezogen.	
Ausbrud fur ben Abftand irgend eines Punttes berfelben	405
vom Focus	195.
Ort eines Bunites, beffen Unterfchied ber Entfernungen vom Focus = 2a	467
	197.
Polar-Gleichung ber Hoperbel	
(1) wenn ein Focus der Pol ift	198.
(2) wenn ber Mittelpunft ber Pol ift	202,
Die Focal-Abstande machen gleiche Binfel mit ber Tan-	
gente	203.
Ort ber Puntte, in welchem eine Sonkrechte vom Focus die Tangente schneibet	204.
Das Rechted aus ben Senfrechten von einem und bem aubern Focus auf die Tangente ift gleich bem Qua-	
die Tangente schneidet	204.

Syperbel auf irgend ein Softem conjugation. Diameter bejogen.

	SS.
Erfter Abichnitt. Bon conjugirten Diametern im Allgemeinen	•3.
Der Ort ber Mittelpunfte irgend einer Angabl paralleler	
Gebnen ift eine gerade Linie, genannt Diameter	206.
Durchschnitt eines beliebigen Diameters mit ber Rurve .	207.
Solche Diameter, melche bie Kurve in einer unendlichen Entfernung treffen, beifen Alpmptoten	209.
Gleichung fur bie Drhinaten irgend eines Djameters	-
* **	210.
Canjugirte Diameter	212.
Gleichung, fun ein Spfiem conjugirter Diameter	214.
Die Agen find die einzigen conjugirten Diameter, welche	
septrecht gu einguber fein tonnen	215.
Bleichung ber Opperbel, bejogen auf irgend ein Softem	
conjugirter Diameter	218.
Durchschnitt ber Tangente mit irgend zwei conjugirten	
Diametern	223.
Wenn bon verschiebenen Punften einer ber Lage nach ge-	
gebenen Linie Tangentenpaare an die Hyperbel ge-	
jogen werden, fo geben bie Linten, welche bie jufam- men gehörigen Berührungspunfte verbinden, alle burch	
henselhen. Vunit	224.
Wenn zwei der Lage nach gegebene Linien fich inner- ober	444,
aufferhalb ber Spperbel fchneiben, fo find die Rechtede	
aus ihren Abfchnitten in einem conftanten Berbaltnif	227.
	- 4
3meiter Abschnitt. Bon ben Eigenschaften eonjugirter Diameter.	
Der Unterfchieb ber Quabrate itgenb zweier conjugirter :- Diameter, ift. gleich bem. Unterfchiebe ber Quabrate ber	
State of the second of the sec	229.
Der Jubalt aller Parallelagramme, beren Seiten ju gwei.	
conjugirten Diametern parallel find, ift conftant	<b>230.</b>
Die Soperbel fann nicht gleiche conjugirte Diameter haben	233.
Das Rechtect aus ben Socal - Abfanden ift gleich bem Qua-	
brate des jugebbrigen halben conjugirten Diameters	234.
Bennielle Tangente aff P, CA und CB in Tufft't	
trifft, so ist PT · Pt = CB*	255.

	55.
Dritter Abichnitt. Bon Supplementar-Sehnen.	
Bleichungen fur zwei Supplementar-Gebnen	236.
3met Diameter, parallel ju gwet Supplementar-Gebnen	
find conjugirte	239.
Siernach fann man giebn	,
(1) einen Diameter, ber ju einem gegebenen eonjugirt ift	240.
(2) eine Tangente an einen gegebenen Punte	241.
Ausbrud für bie Tangente Des Bintels, welchen Die Saupt-	
Supplementar-Sehnen bilben	242.
Geometrische Methode, zwei Diameter, Die conjugirte fein	
follen, gu giebn.	245.
Biertes Rapitel.	•
Bon Afpmptoten.	
Bleichung fur bie Afymptoten, wenn die Spperbel auf be-	
liebige conjugite Dinmetes bejogen ift	246.
Gleichung ber Afomptoten abgeleitet	•
(1) aus ber Gleichung ber Rurve	249.
(2) aus ber Gleichung bet Tangente	250.
Benn irgend eine Gebne verlangert wird, bis fie ben Mympto-	•
ten begegnet, fo find bie Theile gwifchen ber Rurve unb	•
ben Afpmptoten gleich	<b>2</b> 51.
Gleichung ber Spperbel, bezogen auf die Afpmptoten	253.
Aus der Aren-Gleichung der Soperbel die Afpmptoten-	
Gleichung berfelben abzuleiten	254,
Gleichnug ber Tangente auf die Afpmptoten bejogen	255.
Durchschnitt ber Tangente mit ben Afomptoten	257.
Die Agen der Opperbel ju finden, wenn ein Puntt in ber	
Rurve und bie Lage ber Afymptoten gegeben find .	259.
Bon Ven Regelichnitten im Allgemeinen.	
Erftes Rapitel.	
Bon ber allgemeinen Meichung ber brei Kurven.	
Bleichung für einen Regelschnitt im Allgemeinen 260.,	261.
Polar-Gleichung für einen Regelschnitt	162.

Smerres Mubiter.		SS.
fiber bie Schnitte bes Regels.		
Erfldrung bes geraben und schiefen Regels		265.
Gleichung far ben Schnitt eines geraben Regels burch	eine	
Ebene		<b>2</b> 66.
Der Schnitt ift eine Parabel, Ellipfe, Spperbel .	267	-272.
Gleichung fur ben Schnitt eines ichiefen Regels burch	eine	
Chene		274.
Der antiparallele Schuitt eines ichiefen Regels	• •	275.
• _		

#### Berbefferungen.

Seite 8	Zeile	12 v.	u.	Statt	(cheibet	lies	fchneibet.		٠.
= 13	· •			•	OB.		OR.		
= 16	_	8 v.		•	. 7	•	b/		
	•				a°x		-a2x/		
= 18	*	9 v.		- F		. <sup>.</sup> . ,		_	
= 20		10 v.	u.	* (N		<b>*</b> = (1	NP—CD)	•	
- 74		7 v.	u.		$-\frac{a^2x'}{a^2y'}$		$-\frac{b^2x'}{a^2y'}$		
. <b>≠</b> 88	5 .	6 v.	ø.	· • b/	2(5-a/	2)=	b/2(82-	1/2) (i.3b	lr.)
<b>s</b> 99	\$	9 9.	ø.	<b>'</b> =	e/	3	w '		•
= 102	e	4 9.		e ti	ing y		tang2y	?	,
	_	6 v.		_	BSb		В, в		•
= 111		O P.	u.	-		, -	J), D	a\ a	
~117	•	13 v.	٥.	: =	$\left(\frac{y-\beta}{a}\right)$	•	$-b^2\left(\frac{y-a}{a}\right)$	·*);	
= 132		7 v.	ø.	•	$\frac{a^2 \alpha \beta}{a^2 - b^2}$		$\frac{-a^2\kappa^2\beta}{a^2-b^2}$		
= 138		11 0.	u.	- X	sin $\phi$	•	x'sin 9.		•
= 160		4 v.	u.	<b>5</b>	a°y°	=	b°x*	~	
<b>= 160</b>	, <b>s</b>	4 y.			-y')a²s	in <b>°</b> 9	* (x/+y	)°b°sin	9.

## System der Regelschnitte analytisch dargestellt.

### Einleitung.

#### Erftes Rapitel

#### Bon ber Lage eines Puntt

S. 1. Die Lage eines Punktes, ber in einer geraben Linie liegt, ift bestimmt, wenn man ihn auf irgend einen anbern Punkt, ber beliesbig in berselben Linis angenommen ist, bezieht.

(Fig. 1.) Es sei XX' eine gerabe Linie von unbesstimmter Lange, P irgend ein Punkt in ihr, A irgend ein anderer in XX' beliebig genommener Punkt; so ist bie Lage bes Punktes P bestimmt, in bem man ihn auf A bezieht.

Wenn die veränderliche Entfernung AP durch x bes zeichnet wird, so entfernt sich ber Puntt P weiter von A nach X hin, wenn x zunimmt; er nabert sich von X nach A, wenn x abnimmt; er fällt mit A zusammen,

wenn x=0 wirb, und entfernt fich wieber von A, in entgegengefetzter Richtung, gegen X' hin, wenn x negativ wirb.

Daher wenn x positiv angenommen wird, inbem P auf ber rechten Seite bes Punktes A liegt, muß es als negativ angesehn werden, wenn P an der linken Seite von A liegt.

Eben so, wenn die Linie YAY' sentrecht, oder unter einem gegebenen Winkel gegen XX' geneigt ist, so kann auf gleiche Weise gezeigt werden, daß wenn x positiv angenommen wird, wenn P in AY oberhalb XX' liegt, es als negativ angesehn werden muß, wenn P in AY' unterhalb XX' liegt.

Diese conventionelle Regel, nach welcher Untersichied ber Zeichen, Entgegengesetheit ber Richtung anzeigen soll, ist in allen Fallen anwendbar, wo ber Abstand von einem festen Puntte, lange einer ber Lage nach gegebenen geraden Line; zu beurtheilen ift.

§. 2. Die Lage eines Punktes, ber in einer Ebene liegt, ift bestimmt, indem man ihn auf zwei gerade Linien bezieht, bie sich in berselben Ebene unter einem gegebenen Winkel schneiben.

(Fig. 2.) Es sei P ein Punkt in einer Ebene, XX' und XY' seien zwei gerade Linien von unbestimmter Lange, Die sich einander schneiben unter dem bekannten Winkel A. Bon P ziehe PM, PN parallel zu AY und AX. Dann ist die Lage des Punktes P, durch Hulfe der Linien PM, PN, die seine Entfernung von AX, AY wessen, bestimmt.

Die Linien AM, MP heißen Coordinaten bes Punktes P, und A heißt ber Unfangspunkt; AX, AY aber bie Uren ber Coordinaten. Sind die Coordinaten unbekannt, so wird AM mit x, und PM mit y bezeichnet; wenn fie als bekannt and genommen werden, so ift es gewohnlich, sie mit accentuirs ten Buchstaben x', y', ober x'', y'' zw bezeichnen.

Bon ben beiden Coordinaten AM, MP heißt die ers
ftere, der Unterscheidung wegen, die Abfaisse, die letzt
tern die Ordinate. Die Linie AX, auf meldher man
die Abseissen mißt, heißt die Are der x, und die Linie AY,
in deren Richtung man die Ordinaten nimmt, die Art
der y.

Die Aren AX, AX werben im Allgemeinen unfer rechten Winkeln gezogen, und beißen bahn recht int itibe Aren; in allen andern Fällen heißen fic fiche wielliche Aren.

§. 3. Wenn die Coordinaten eines Punte tes gegeben sind, so werden die Zeichen, mit benen fie behaftet sind, bienen, um zu bestimt men, in welchem von ben vier Winkeln, die von ben Uxen um den Anfangspunkt A gebilbet werden, dieser Punkt-liegt.

Ed feien x', y' bic, Corebindten bes Puntfet P, Rig. 2.; bann ift

1) wenn P irgendwo innerhalb bes Wintels YAX liegt, x' und y', beibes positiv.

Liegt er in der Axe AX, so ist x' positio, und y'= o, liegt er dagegen in der Axe AY, so ist x'=0, und y ist positiv.

2) Liegt P irgendivo innerhalb des Wintels YAX, so ist x' negativ, und y' positiv, und wenn er int ver Ure AX' liegt, ist x' negativ, und y'=0.

3) Liegt P irgendwo innerhalb des Winkels Y'AX', so find x' und y' belbe negativ, und liegt er in der Ax' so ist x=0, und y' ist negativ.

- 4) Liegt P irgendwo innerhalb bes Winkels Y'AX, fo ift x' positiv, und y' negativ.
- §. 4. Benn eine Kinie, gerabe ober frumm, in einer Ebene gezogen ift, und aus ber Definiztion, ober sonft einer bekannten Eigenschaft bieser Linie, ein Berhältniß ber Coordinaten ingend eines ihrer Punkte abgeleitet werben kann, so heißt die unbestimmte Gleichung, welche bieses Berhältniß ausbrückt, angenommen, es bleibe für jeden Punkt dasselbe, die Gleischung bieser Linie.

Umgekehrt, wenn eine unbestimmte Gleischung zwischen zwei Beranberlichen gegeben ift, kann eine Reihe von Punkten gefunden werben, welche ben verschiedenen Auflbsungen bieser Gleichung entsprechen: die Reihe dieser so bestimmten Punkte heißt der Ort (locus) der gegesbenen Gleichung.

Der Sinn dieser beiben Satze wird vollkommen erlantert werden, wenn wir von der geraden Linie und dem Kreise handeln werden.

§. 5. Die Lage eines Punktes in einer Ebene kann nicht allein burch hulfe feiner Cosordinaten bestimmt werden, sondern auch durch hulfe seiner Entfernung von einem festen Punkte, und des Winkels, welchen diese Entfernung mit einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie macht. (Siehe Fig. 2.)

Es sei also P irgend ein Punkt in einer Ebene, A ein fester Punkt, AX eine gerabe, ber Lage nach ges gebene Linie. Man stelle sich bie Punkte A' und P verbunden vor. Dann ist offenbar ble Lage P gegeben, wenn die Entfernung AP und der Winkel PAX, welchen jene mit AT macht, bekannt sind.

Der feste Punkt A heißt ber Pol, und bie verans berliche Entfernung AP ber Radius vector; AP wird gewöhnlich mit r bezeichnet, und ber Winkel PAX burch ... Die Größen r und ... heißen bie Polar=Coorbinaten, und bie Gleichung, welche bas Verhaltniß zwischen ihnen und irgend einem Punkte einer Kurve ausdrückt, heißt bie Polar=Gleichung ber Kurve.

#### 3meites Rapitel.

#### Von ber geraben Linia

§. 6. Die Gleichung ber geraben Linie gu finben.

(Fig. 3.) Es fei BZ eine gerabe Linie von unbestimmter Lange, beren Gleichung gefunden werden foll.

Da die Lage ber Aren willfürlich ift, so wollen wir annehmen.

1) daß ihr Anfangspunkt A ein Punkt in ber geges benen Linie sei. Durch A ziehe AX, so daß sie mit BZ einen bekannten Winkel mache, ferner bilbe AX mit AX einen rechten Winkel: nimm irgend einen beliebigen Punkt P in BZ, und ziehe auf AX die senkrechte PM.

folglich AM=x, MP=y;

PM tang ZAX;

b. h. y= tang ZAX;

Da aber ber Binkel ZAX als bekannt angenommen worden, so konnen wir seine Tangente mit a bezeichnen; baber y=a.

Da baffelbe Werhaltniß als bestehend zwischen ben Coordinaten eines jeden andern Punktes der Linie nachgewiesen werden kann, so ist die verlangte Gleichung

y=ax.

Angenommen

2) Der Anfangspunkt ber Aren sei außerhalb ber gegebenen Linie, z. B. in A.

(Fig. 4.) Es treffe BZ bie Linie AX in C, und AY in B: burch B ziehe BN parallel mit AX, so baß es PM bie Orbinate von P in N treffe.

Wie vorher fei AM=x, MP=y; auch fei AB=b.

Dann ist

PN tang PBN

= tang ZGX;

b. h.

PN=NB·tang ZCX.

Nber

PN=PM-MN

= y - b;

folglich y—b= ax ober y=ax+b,

welches alfo, wie im vorigen Falle, die gefuchte Gleischung ift.

Daher ift flar, baß bie Gleichung einer geraben

Linie Ist entweder

y=ax

oder y=ax+b,

je nachbem fie burch ben Apfangspunkt geht ober nicht.

§. 7. Bufat. Wenn bie Uren unter irgend einem Winkel gegen einander geneigt find, so ift

$$\frac{PM}{MA} = \frac{\sin PAM}{\sin APM} = \frac{\sin ZAX}{\sin ZAY};$$

setze bies = a, so ist bie Gleichung fur BZ von bersels ben Form, wie vorher,

y=ax+b,

in welcher ber Coefficient a nun bas Berhaltniß ber Sinus ber Winkel, welche bie Linie BZ mit ben Uren ber x und y macht, ausbrückt.

S. 8. Bei Unwendung der Gleichung einer geraden Linie nimmt man allemal an, die Linie sei von undesstimmter Lange. Wenn wir Gelegenheit haben, zwei gerade Linien zu betrachten, so ift es, anstatt sie durch die Gleichungen

y=ax+b Y=a'X+b'

zu bezeichnen, worin zwei Arten von Buchstaben x, y und X, Y angewandt werden, um bie veranderlichen Coordinaten zu bezeichnen, gewöhnlich sie durch bie Gleischungen

y=ax+b, y=a'x+b'

zu bezeichnen, in welchen dieselben Buchstaben x, y für die Coordinaten in beiden Gleichungen gebraucht wersen. Aber man muß sich immer erinnern, daß x und y in diesen beiden Gleichungen nicht benselben Werth haben, außer in dem besondern Falle, wo die Linien sich schneisben; dem alsdann, wie klar ist, werden die Coordinaten für den Durchschnittspunkt in beiden Linien dieselben sein.

Da aber ber Minkel ZAX als bekannt angenommen worden, fo konnen wir feine Tangente mit a bezeichnen; baher

Da baffelbe Werhaltniß als bestehend zwischen ben Coordinaten eines jeden andern Punktes ber Linie nachge= wiesen werben kann, so ift bie verlangte Gleichung

y=ax.

Angenommen .

2) Der Anfangspunkt ber Aren sei außerhalb ber gegebenen Linie, g. B. in A.

(Rig. 4.) Es treffe BZ die Linie AX in C, und AY in B: burch B ziehe BN parallel mit AX, so baß es PM die Ordinate von P in N treffe.

Die vorher fei AM=x, MP=y; auch fei AB=b.

Dann ist tang PBN NR

> tang ZGX: PN=NB · tang ZCX.

b. b. Aber

PN=PM-MN

= y - b;

y-b=folglich ax

ober ' y = ax + b, welches alfo, wie im vorigen Falle, bie gefuchte Gleis

chung ift.

Daher ift flar, bag bie Gleichung einer geraben

Linie Ist

y==ax entweder

y=ax+b, øber

je nachdem fie burch ben Apfangepunkt geht ober nicht.

§. 7. Bufat. Wenn bie Aren unter irgend einem Winkel gegen einanber geneigt find, fo ift

$$\frac{PM}{MA} = \frac{\sin PAM}{\sin APM} = \frac{\sin ZAX}{\sin ZAY};$$

setze bies = a, so ist bie Gleichung fur BZ von berfels ben Form, wie vorher,

y=ax+b,

in welcher ber Coefficient a nun bas Berhaltniß ber Sinus ber Winkel, welche bie Linie BZ mit ben Uren ber x und y macht, ausbrückt.

S. 8. Bei Anwendung der Gleichung einer geraden Linie nimmt man allemal an, die Linie sei von undesstimmter Lange. Wenn wir Gelegenheit haben, zwei gerade Linien zu betrachten, so ist es, anstatt sie durch die Gleichungen

y=ax+bY=a'X+b'

zu bezeichnen, worin zwei Arten von Buchftaben x, y und X, Y angewandt werden, um bie veranderlichen Coordinaten zu bezeichnen, gewöhnlich sie burch bie Gleischungen

> y=ax+b, y=a'x+b'

du bezeichnen, in welchen dieselben Buchstaben x, y für die Coordinaten in beiden Gleichungen gebraucht wersen. Aber man muß sich immer erinnern, daß x und y in diesen beiden Gleichungen nicht benselben Werth haben, außer in dem besondern Falle, wo die Linien sich schneisben; benn alsdann, wie klar ist, werden die Coordinaten für den Durchschnittspunkt in beiden Linien dieselben sein.

§. 9. Umgefehrt, der Ort ber unbestimmten Gleichung bes erften Grabes

$$Ay + Bx + C = o$$

ift eine gerabe Linie.

Denn indem durch A bividirt und bie Gleichung in hinsicht auf y aufgeloft wird, hat man

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A}$$

und indem man  $-\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$  mit a, und  $-\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$  mit b bezeichnet,

y=ax+b,

welches mit ber Gleichung ber geraben Linie, bie eben' entwickelt ift, übereinstimmt.

- Menn es erforberlich ift, ben Ort einer uns bestimmten Gleichung bes erften Grabes zu conftruiren, fo ift es hinreichend, zwei ihrer Puntte zu finden, weil nur zwei Puntte nothig find, bie Lage einer geraden Linie zu bestimmen. Die zwel Puntte, welche am leichtes ften ju finden find, find diejenigen, in welchen die gu fuchende Linie die Aren von x und y scheibet, und welche bestimmt find, indem man in der gegebenen Gleichung nach einander x und y = o macht; im erften galle fellt ber fich ergebende Werth von y die Entfernung bes Uns fangepunktes von bem Durchschnittspunkte mit AY bar; im zweiten Falle ftellt ber fich ergebende Berth bon x bie Entfernung bes Anfangepunktes von bem Durch= schnittspunkte mit AX bar. Die unendliche gerade Linie, bie biese Durchschnittspunkte verbindet, ift die gesuchte Linie.
- S. 11. Bur Erlauterung biefes Berfahrens moge es nun erforberlich fein, bie Lage einer geraben

Linie anzugeben, welche ber Ort irgend einer Gleichung bes erften Grabes ift.

Die gegebene Gleichung tann unter folgenden vier Formen portommen:

- 1) y = ax + b,
- 2) y = -ax + b,
- 3) y = ax b,
- 4) y = -ax b.
- 1) Die gerabe Linie, welche ber Ort ber ersten bieser Gleichungen ift, ift BZ (Fig. 4.).
- 2) Den Ort von y=—ax+b zu finden (Fig. 5.). Mache x=a, folglich y=b. In AY nimm AB=b, welches der Werth von y für x = 0 ist.

Mache y = 0; folglich x =  $\frac{b}{a}$ . In AX nimm. AC= $\frac{b}{a}$ , welches der Werth von x für y = 0 ift.

Berbinde B und C, und die unendliche Linie BZ ift ber gesuchte Ort.

3) Den Ort von y=ax—b zu findeu. (Fig. 6.) Mache x=0; folglich y=-b. In der verlängers ten YA nimm AB=b.

Mache y=0; folglich x= $\frac{b}{a}$ . In AX nimm AC =  $\frac{b}{a}$ ; verbinde B und C, bann ift BCZ ber gesuchte Ort.

4) Den Ort von y =-ax-b zu finden. Mache x = 0; folglich y=-b. In den verlangerten YA nimm AB=b.

Mache y=0; folglich x=-b. In ber verlanger-

baher

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

substituirt man bies in (4), so ift

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'),$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

§. 15. Bufat 1. Wenn einer ber Puntte a. B. ber zweite in ber Ure von x liegt, fo ift y"=0, und bie Gleichung wird

$$y-y'=-\frac{y'}{x''-x'}(x-x').$$

§. 16. Bufat 2. Wenn berfelbe Puntt auf ber Are ber y liegt, so ist x"=0, und die Gleichung wird

$$y-y'=-\frac{y''-y'}{x'}(x-x').$$

§. 17. Die Gleichung einer geraben Linie, welche burd einen gegebenen Puntt mit einer gegebenen Linie parallel gezogen ift, zu finben.

(Fig. 8.) Es fei Q ber gegebene Puntt, unb x', y' feine Coordinaten; BZ bie gegebene Linie, und ihre y==ax-+-b. Gleichung

Durch Q ziehe QR parallel mit BZ, fo bag fie bie verlangerte XA in R treffe. Dann ift bie Form ber Gleichung S. 41,12

- y-y'=A(x-x')....(1),ober A=tang QRX = tang ZCX = a; daher durch Substitution in (1),

meldes bie gesuchte Gleichung ift.

§. 18. 3usat. Daber ist die Gleichung einer Linie, die parallel mit einer andern ist, beren Gleichung y=ax+b ist
y=ax+b'.

§. 19. Die Gleichung einer geraben Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt, fenkrecht aus einer gegebenen Linie gezogen ift. (Fig. 9.) Es fei Q ber gegebene Punkt, x', y' feine

Coordinaten; CZ bie gegebene Linie, und ihre Gleichung y=ax+b.

Durch Q ziehe QR sentrecht auf CZ, so baf sie AX in R treffe.

Da nun QR burch einen gegebenen Punkt geht, so ift ihre Gleichung nach §. 11. von ber Form

$$y-y'=\Lambda(x-x')....(1),$$

aber A = tang QRX = - tang QRA,

$$= -\cot z CX, \quad \forall z \in a, \forall z \in$$

baber burch Substitution in (1)

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x'),$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

§. 20. Bufat, Daber ift die Gleichung einer Linie, die fentrecht auf einern andern, beren Gleichung ift

$$y=ax+b$$

$$y=-\frac{1}{a}x+b$$

S. 21. Die Tangente bes Bintels ju finben, unter welchen fich zwei gegebene gerabe Linien schneiben. (Fig. 10.) Es seien BZ, B'Z' bie gegebenen gerasten Linien, beren Gleichungen find

$$y=ax+b$$
,  $y=a'x+b'$ .

Wenn durch den Anfangspunkt die Linien AL, AL' zu ben Linien BZ, B'Z' respective parallel gezogen wers den, so sind ihre Gleichungen (§. 7.)

Mun ist LAL'=LAX-L'AX;

baher tang LAL'= \frac{\tang LAX - \tang L'AX}{1 + \tang LAX \cdot \tang L'AX},

b. h., wenn tang LAL'= m,

$$m = \frac{a-a'}{1+aa'},$$

welches ber fur die Tangente gesuchte Ausbruck ift.

§. 22. Bufat. Menn bie Linien parallel find, ift a=a', und wenn fie auf einanter fentrecht find, ift

1-aa'=0, ober a'=
$$-\frac{1}{a}$$
.

wie in §. 18. und §. 20.

S. 23. Die Gleichung einer geraben Linie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen geraden Linie einem gegebenen Winkel macht.

Es fei m die Tangente des gegebenen Winkels, und die Gleichung ber gegebenen Linie fei

y=ax+b.....(1), bann ist die gesuchte Gleichung von der Form y-y'=A(x-x')....(2), in welcher A zu bestimmen ist. Aber nach bem letten Sate ift

$$m = \frac{A - a}{1 + Aa};$$

b. h.

 $m + Aam = A \rightarrow a;$ m+a = A-Aam=A(1-am)

folglich

$$A = \frac{a+m}{1-am}$$
;

substituirt man bies in (2), so hat mar

$$y-y'=\frac{a+m}{1-am}(x-x'),$$

y-y'=a+m
1-am(x-x'),
welches bie gesuchte Gleichung ift.

§. 24. Bufat 1. Wenn bie Linien parallel find, fo ift m = o; baber wird bie Gleichung

y-y'=a(x-x')

wie in §. 17.

§. 25. Bufat 2. Wenn bie Linien fentrecht find ift m unendlich groß; baber, weil a im Babler und 1 im Nenner in Bezug auf m verschwinden, fo wird bie Gleidung.

$$y-y' = \frac{m}{-am}(x-x'),$$
  
 $y-y' = -\frac{1}{a}(x-x'),$ 

b. h.

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x'),$$

wie in §. 19.

§. 26. Die Entfernung zweier Puntte burch die Werthe ihrer Coordinaten auszubruden.

(Fig. 11.) Es feien PO bie gegebenen Duntter : y' die Coordinaten des ersteren, x", y" die des andern.

Durch Q ziehe QR parallet zu AX, welche die Dr= binate von P in Retrifft.

Dann ist 
$$PQ^2 = QR^2 + RP^2$$
  
 $= (AN-AM)^2 + (MP-QN)^2$   
 $= (x''-x')^2 + (y''-y')^2$ ;  
b. h.  $PQ = V \left\{ (x''-x')^2 + (y''-y')^2 \right\}$ , welches die gesuchte Entsernung ist.

§. 27. Zusas. Wenn einer von beiden Punkten, z. B. P mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, dann ist x' und y' = 0; also  $AQ = V(x''^2 + y''^2)$ .

§. 28. Die Coorbinaten bes Punktes zu finden, in welchen fich zwei gerabe Linien einsander ichneiben. (Fig. 12.)

Es seien y=ex+b.....(1), und y=a'x+b'.....(2),

bie Gleichungen ber beiben Linien BZ, B'Z', bie fich in P fchneiben; und x', y' bedeute bie Coordinaten AM und PM bes Durchschnittspunktes.

Da nun der Punkt P den beiben Linien BZ, ZB' gemeinschaftlich ift, so werben seine Coordinaten beiben obigen Gleichungen genugen. Man hat baber

$$y'=ax'+b$$
,  
 $y'=a'x'+b'$ ;

woraus, indem y' aus biesen Gleichungen eliminirt wird, folgt

(a-a') 
$$x' = -(b-b');$$
  
 $x' = -\frac{b-b'}{a-a'};$ 

eliminirt man auch x' aus benselben Gleichungen, so ist  $y' = \frac{ab' - ba'}{a - a'}$ ,

welches bie gesuchten Coorbinaten finb.

§. 29. Aus der porstehenden Aufgabe ergiebt sich also, daß der Durchschnitt irgend zweier geraden Linien analog ist mit der Elimination des und y aus ihren Gleichungen. Da diese Bemerkung auf was immer für zwei, in einer Ebene gelegene, gerade Linien anwends bar ist, so kann als allgemeiner Grundsatz festgeskellt werden: daß die Elimination zwischen irgend zwei Gleichungen übereinstimmt mit-dem Durchsschnitte ihrer Derter.

§. 30. Die Lange ber Sentrechten zu fins ben, die von einem gegebenen Puntte auf eine gegebene gerade Linie gezogen ift.

(Fig. 9.) Die Coordinaten bes gegebenen Punktes Q feien x', y' und die Gleichung ber gegebenen Linie BZ fei

y=ax+b.

Dann ift die Gleichung fur QR, die burch Q geht und fentrecht auf BZ ift, nach §. 16.14

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$$

Da nun ber Durchschnittspunkt P beben Linien gemeinschaftlich ift, und x", y" beffen Coordinaten find, fo werden biese ben obigen Gleichungen ein Genuge leis ften; baber

$$y'' = ax'' + b \dots (1)^{n}$$

$$unb \ y'' - y' = -\frac{1}{a} \left( x'' - x' \right) \dots (2).$$

$$unb \ PQ = V \left\{ (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 \right\} \S. 19.$$

$$= V \left\{ (x'' - x')^2 + \frac{1}{a} \left( x'' - x x' \right)^2 \right\},$$

$$= V \left\{ (x'' - x')^2 + \frac{1}{a} \left( x'' - x x' \right)^2 \right\},$$

$$= V \left\{ (x'' - x')^2 + \frac{1}{a} \left( x'' - x x' \right)^2 \right\},$$

inbem man für y" - y' feinen Werth aus (2) fubftituirt;

$$=\pm\frac{x''-x'}{a}\sqrt{a^2+1}\cdots 3$$

Um nun x" zu finden, muß man y" aus (1) und (2) eliminiren; bann hat man

$$ax'' + b - y' = -\frac{1}{a} (x'' - x');$$

$$baher a^2x'' + ab - ay' = -x'' + x';$$

$$x'' = \frac{ay' - ab + x'}{a^2 + 1}$$

$$also x'' - x' = \frac{ay' - ab - a^2x'}{a^2 + 1};$$

$$Dies nun in (3) substituirt hat man$$

$$PQ = \pm \frac{y' - ax' - b}{a^2 + 1}$$

welches bet gesuchte Berth ift.

§. 31. Zusat 1. Wenn die gegebene Linie BZ burch ben Anfangspunkt geht, ift b = 0 und

$$PQ = \pm \frac{y' - ax'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

§. 32. Jusat 2. Wenn ber gegebene Punkt Q mit bem Anfangspunkt zusammenfallt, bann ist x' y' beibes = 0, und

$$PQ = \mp \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

je nachbem die Linie unter= ober oberhalb AX liegt.

Bemerfung. Um Bieberholung ju vermeiben, merben wir in Bufunfe ben Punft, beffen Coordinaten x' und y' find,

als den Puntt (x', y') bezeichnen; und die gerade Linie, beren Gleichung ift

y=ax+b
als die gerade Linie
y=ax+b.

## Drittes Rapitel

Bom Rreife.

§. 33. Die Gleichung bes Rreifes gu fine

(Fig. 13.) Es fei C ber Mittelpunkt eines Rreifes, beffen Gleichung gesucht wirb.

Da die Lage ber Uren willfurlich ift, so wollen wir annehmen,

1) ber Mittelpunkt fei ber Unfangspunkt.

Es sei CX irgend ein Diameter, ziehe nun CY sentrecht auf bemselben: im Umfange nimm irgend einem puntt P, und von diesem ziehe die Sentrechte PM auf CX, nimm CM=x, MP=y, CP=r.

Dann ist in bem rechtwinklichten Preiede CMP, CM2+MP2=CP2;

ober burch Substitution

$$x^2+y^2=r^2;$$

und ba dieselbe Beziehung der Coordinaten eines jeden andern Punktes im Umfange bewiesen werden kann; so, ist die verlangte Gleichung

$$x^2+y^2=r^2$$
.....(1).

2) Es fei ber Endpunkt irgend eines Diameters als ber Anfangspunkt angenommen.

[2\*]

(Ag. 14.) Es sei A ber Anfangspunkt, AM=== MP=v. Dann ift nach einer befannten Eigenschaft bes Rreises

 $MP^2 = AM \cdot MB$ 

ober .

$$y^2 = x(2r - x)$$
  
=  $2rx - x^2$ .....(2).

welches bie verlangte Gleichung ift.

3) Es werbe irgend ein Punkt in ber Are ber als Anfangspunkt angenommen. (Fig. 15.)

Dann hat man, wenn AC=x', wie vorher

$$CM^2+MP^2=CP^2$$
,

ober

$$(x-x')^2+y^2=r^2....(3)$$
.

Auf gleiche Beise, wenn ber Anfangspunkt in ber Are ber y liegt, wird die Gleichung fein

§. 34. Es werbe irgent ein beliebiger Punft, innerhalb ober außerhalb bes Kreises als ber Unfangspunkt (Kig. 16.) angenommen.

Es seien die Coordinaten AD, DC bes Mittelpunktes burch z' und y' bezeichnet.

Dann ist

CM<sup>2</sup>+MP<sup>2</sup>=CP<sup>2</sup>:

b. b.

ober 
$$(\Delta N - \Delta D)^2 + (NP - CD)^2 = CP^2;$$
  
b. h.  $(x-x')^2 + (y-y')^2 = r^2 \dots (4),$ 

welches bie gesuchte Gleichung ift.

Daraus ergiebt fich, daß bie Gleichung bes Rreifes in jebem galle bom zweiten Grabe ift, und bag bie Gins' fachheit ihrer Form von ber Lage ber Coordinaten Uren abhangt. Die allgemein gebrauchlichften Gleichungen find:

2) 
$$-y^2 = 2rx - x^2$$
.

S. 35. Die Gleichung bes Kreifes, wenn bie Aren rechtwinklicht find, und in irgend einem beliebigen Punkte anfangen, ift

$$(y-y')^2+(x-x')^2=r^2,$$

welche entwickelt giebt ...

$$y^2+x^2-2y'y-2x'x+y'^2+x'^3-x^3=0...(1)$$
.

Mun ift bie allgemeine Gleichung bes zweiten Grabes zwischen zwei Beranberlichen

$$ay^2+bxy+cx^2+Ay+Bx+C=0...(2)$$
.

Bergleicht man die correspondirenden Glieber von (1) und (2), so hat man

$$a = 1$$
,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,

woraus folgt, baß bie allgemeine Form ber Gleichung bes Rreifes, bezogen auf rechtwinklichte Cpordinaten, ift

$$y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0.$$

3. 36. Die Lage und Größe bes Kroifes un finden, welcher der Ort der Gleichung vales 4.44-Bx+C == 0.ift.

Bergleicht man fie mit ber Gleichung (1) im lebeiten f., fo ift

A=-2y', B=-2x', C=
$$r^{2}+y'^{2}-r^{2}$$
;  
baher  $y'=-\frac{A}{2}$ ,  $z'=-\frac{B}{2}$ .

woraus, ba bie Coorbinaten bes Mittelpunktes bekannt find, bie Lage bes Rreifes bestimmt ift.

Dann, ba
$$r^2 = \frac{A^2 + y'^2 - C}{4 + \frac{B^3}{4} - C}$$

also  $r = \frac{1}{2} V(A^2 + B^2 - 4C)$ ; so ift auch die Große bes Kreises befannt.

Erläuterung. Die Lage und Größe bes Kreises ju finden, welcher ber Ort ber Gleichung y2+x2=6x-8y ist;

burch Umformung hat man

$$y^2+x^2+8y-6x=0....(1)$$

und burch Bergleichung biefer mit ber Gleichung
y2+x2-2yy1-2xx'+y12+x18-x2 = 0...(2)

erhalt man

$$2y'=-8$$
; also  $y'=-4$   
 $2x'=6$ ; also  $x'=3$ ;  
 $y'^2+x'^2=r^2=16+9$   
 $r^2=25$ ;

r\*.

also r == 5.

Da r\*=x'2+y'2, so ist klar, daß der Anfangspunkt in dem Umfange klegen muß. Seige daher AY, AX seien rechtwinklichte Axen; auf AX nimm AB=3, von B ziehe unter dem rechten Winkel zu AX die BC, an der entgegengeseigten Seite desselben = 4; dann wird der von C als Mittelpunkt mit CA als Radius beschriebene Areis der perlangte sein.

§. 37. Den Durchfcnitt einer geraben Lie nie mit bem Rreife zu bestimmen.

Es fei ber Rreis, beffen Gleichung ift

$$x^2+y^2=r^2$$
....(1)

burch eine gerade Linie geschnitten, beren Gleichung ift y=ax+b.....(2).

Es feien ferner t', y' bie Coprdinaten bes Durchschnittes.

Da biefe nun ber Gleichung (1) und (2) genugen muffen, fo haben wir

$$x^{/2}+y^{/6}=r^2$$

und y' == a\*/--b,

aus ber zweiten hat man  $x' = \frac{y' - b}{a}$ ; also durch Substitution in ber ersten

$$y'^{2} + \left(\frac{y' - b}{a}\right)^{2} = r^{2}$$
b. b. 
$$a^{2}y'^{2} + y'^{2} - 2by' + b^{2} = a^{2}r^{2}$$
b. b. 
$$y'^{2} - \frac{2b}{a^{2} + 1}y' + \frac{b^{2} - a^{2}r^{2}}{a^{2} + 1} = 0,$$

aus welcher quabratischen Gleichung, fich zwei Werthe für y' ergeben; und eben so werden auch durch Substistution in einer ber beiden obigen Gleichungen zwei Werthe von x gefunden werden.

Wenn die beiben Werthe von y' gleich find, fallent die beiben Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt den Kreis; und wenn die beiben Werthe von y imaginair sind, liegt die gerade Linie ganzlich aufzferhalb bes Kreises.

Daber tann eine gerabe Linie ben Rreis in nicht mehr als zwei Puntten fchneiben.

S. 38. Die Gleichung einer geraben Linie zu finden, die ben Rreis in einem gegebenen Puntt berührt. (Fig. 17.)

Es feien x', y' bie Coordinaten bes gegebenen Puntstes; x'', y'' die irgend eines andern Punttes im Umsfange nabe an bem ersten.

Dann ift bie Gleichung ber geraben Linie, bie burch biefe beiben Punkte gebt, und ben Umfang schneibet, nach, (§. 14.)

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')....1$$

febner, ba ber Berührungspunkt ein Punkt im Umfange ift, so ift

 $y'^2+x'^2=r^2....(2).$ 

Durch Gulfe biefer beiben Gleichungen konnen bie gesuchten Coordinaten x', y' bestimmt werden.

Die reducirte Gleichung, welche fich durch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, wird offenbar vom zweiten Grade sein. Daber giebt es zwei Berührungspunkte, mit andern Worten, von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte konnen zwei Tangenten an den Kreis gezogen werden.

Diefe Aufgabe gewährt eine Erlauterung bes im §. 24. aufgestellten Princips, baß "Elimination aus zwei Gleichungen übereinstimmt mit bem Durchs

fonitte ihrer Derter."

Die beiben resultirenben Gleichungen finb

$$y'^2+x'^2=r^2$$
  
 $y'y''+x'x''=r^2$ 

Die erste von diesen, für sich betrachtet, stellt einen Kreis dar, welcher der Ort aller der Punkte ist, beren Coordinaten dieser Gleichung genügen; und die andere an sich betrachtet, stellt eine gerade Linie dar, welche der Ort aller Punkte ist, deren Coordinaten dieser Gleichung genügen. Werden diese Derter construirt, und auf diesels den Axen bezogen, so ist klar, daß die Punkte, in welchen sie sich schneiden, die verlangten Berührungspunkte sein werden, weil die Coordinaten dieser Punkte die besondern Werthe von x' und y' sind, welche beiden Gleichungen genügen.

Mun ift ber Ort ber erften Gleichung ber gegebene Rreis; es werbe fein Mittelpunkt C angenommen, als

ber Anfangspunkt ber Aren. CX, CY.

Die gerade Linie, welche ber Ort ber zweisen Gied

Es sei 
$$y' = 0$$
; so ist  $x' = \frac{r^2}{x''}$ 

$$x' = 0; \cdot \cdot \cdot y' = \frac{x^2}{y''}$$

 $\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{S} \mathbf{n} \ \mathbf{C} \mathbf{X} \text{ nimm } \mathbf{C} \mathbf{M} = \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{x}^{44}} \text{ und ouf } \mathbf{C} \mathbf{Y} \text{ nimm } \mathbf{C} \mathbf{N}$ 

P, p schneiben; bies: werben bie verlangten Berthpunges; puntte fein. (Fig. 18.)

§. 42. Jusat 1. Da bie gerabe Linie Pp, burch ben Durchschnitt mit dem Kreise, die Berührungspunkte bestimmt, so folgt, daß die Gleichung y"y'+x'x" = r^2,

worin x' und y' bie Beranderlichen find, bie Gleichung ber Linie ift, welche bie Beruhrungspunkte verbindet.

§. 43. Hieraus tann auch ber folgende Lehrsatz bes wiesen werden.

Benn von verschiedenen Punkten einer ber Lage nach gegebenen Linie, Tangenten=Paare an den Kreis gezogen werden, so werden die geraden Linien, die in jedem Falle die Berüh=rungspunkte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

Denn es sei C ber Mittelpunkt bes gegebenen Kreisses (Fig. 18.), Qq die ber Lage nach gegebene Linie, und von einem Punkte Q (x", y") ziehe zwei Tangenten QP, Qp; von C ziehe die Senkrechte CX auf Qq, auch ziehe CY rechtwinklich zu CX; nimmt man alsbann CX und

ST als Aren, fo with nach bem letten Jusage bie Gleischung ber Linie Pp fein

 $y'y''+x'x''=r^2$ ,

worin x' und y4 die Coordinaten bon P find.

Mun begegne Pp ber CX, bann ift y' = 0, und

daher

$$x' = \frac{r^2}{x''} = CM.$$

Da nun hieser Werth von CM unabhängig von y'ift, so wird es dasselbe bleiben für alle Punkte, beren Abscissen zu' find, b. h. für alle Punkte in der ges gebenen Linie Qq, wie zu beweisen war.

## Regelschnitte.

## Erflärung.

§. 44. Ein Regelschnitt ift, ber Ort eines Punktes, beffen Entfernungen von einem fes ften Punkte, und einer geraben, ber Lage nach gegebenen Linie, zu einander in einem conftanten Berhaltniffe find.

(Fig. 19.) So sei S ber feste Punkt, Kk eine ber Lage nach gegebene feste Linie, P irgend ein Punkt; versbinde PS und ziehe auf Kk die Senkrechte PQ; ist dann PS fortwährend zu PQ in bemselben constanten Verhältsnisse, so ist der Ort von P ein Regelschnitt.

Der feste Punkt S heißt ber Focus (Bennpunkt), und die gerade Linie Kk, deren Lage gegeben ist, heißt die Directrix (Alchtlinie).

- §. 45. Die besondere Art bes Regelschnittes hangt von dem conftanten Berhaltniffe PS : PQ ab, welches entweber ein Berhaltnif ber Steichteit, ober fleineren, ober größeren Ungleichheit ift.

1) Es sei PS = PQ.

Dann heißt ber Ort von P bie Parabel.

2) Es sei PS < PQ,

bann mirb ber Ort von P Ellipse genannt.

3) Es sei PS > PQ,

bann wird ber Ort von P' bie Spperbel genannt.

## Von der Parabel.

Erftes Rapitel.

Bon ber Parabel, bezogen auf ihre Agen.

§. 46. Die Gleichung ber Parabel gu fin-

Die Parabel ist ber Ort eines Punktes, bessen Entfernung vom Focus immer dem senkrechten Abstande von ber Directrix gleich ist. (Fig. 20.)

Es sei S ver Focus, Kk die Directrix, P irgend ein Punkt in der Parabel; durch S ziehe die unbegränzte Linie ESX senkrecht auf die Directrix; won P ziehe die Senkrechten PM, PQ respective auf EX, Kk, und verbinde P, S.

Bird bann ES-in A in zwei gleiche Theile getheilt, fo ift A, ber Definition gemaß, ein Puntt ber Parabel;

und AY als die rechtwinklichten Uren, auf welche die Parabel bezogen werden soll.

Es sei AM = x, MP = y, und AS = m. Dann ist SP<sup>2</sup>=PM<sup>2</sup>+MS<sup>2</sup>=y<sup>2</sup>+(x-m)<sup>2</sup>....(1), aber SP<sup>2</sup>=PQ<sup>2</sup>=EM<sup>2</sup>=(EA+AM)<sup>2</sup> =(m+x)<sup>2</sup>....(2).

Borans, wenn biefe beiben Berthe von SP2 gleichgefett werden, folgt

 $y^2+(x-m)^2=(x+m)^2$  also  $y^2=4mx$ , welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 47. Die Geftalt ber Parabel aus ihrer Gleichung zu bestimmen.

Indem diefelben Uren beibehalten werden, ift bie Gleichung ber Parabel

 $y^2 = 4mx$   $y = \pm 2\sqrt{mx}.$ 

Es fei x = 0; dann ist y = 0; baher geht die Kurve burch ben Anfangspunkt A.

Es werbe angenommen, x habe irgend einen positiz

Alsbann giebt es für jeben Werth von x zwei gleiche Werthe von y mit entgegengesetzen Zeichen; wenn x wächst, wachsen auch die Werthe von y; und wenn x unendlich groß genommen wird, werden auch die Werthe von y unendlich groß.

Es werbe nun x von irgend einem negativen Werthe angenommen.

Indem nun die Werthe von y in diesem Falle immaginair werden, so ist klar, daß kein Theil ber Kurve an der linken Seite von A liegen kann. Die Parabel besteht bemnach aus zwei unendlichen Urmen, AZ, Az, bie an ber rechten Seite von A und symmetrisch in Bezug auf bie gerabe Linie AX liegen. (Fig. 21.)

Der Punkt A heißt ber Scheitel, und die Linie AX bie Ure ber Parabel.

- 5. 48. Busat 1. Die Parabel kann nur einen Gocus und nur eine Directrix haben.
  - \$. 49. Bufat 2. Den Werth von SL ber Orbis nate, bie burch ben Focus geht, ju finden.

Im Puntte S, x = AS = m.

Daher

 $y^2 = 4m^2$ 

also

y = ± 2m = SL ober Sl.

Die Doppelordinate Ll, die durch ben Focus geht, beißt ber hauptparameter, ober latus rectum, der Parrabel.

- §. 50. Zusat 3. Daber, wenn P irgend ein Punkt ber Parabel, (Fig. 20.) ist, so ift PM2 = Ll · AM:
- b. h. bas Quabrat ber Ordinate ift gleich bem haupts parameter, multiplicirt burch bie zugehörige Absciffe.
- §. 51. Den Durchschnitt einer geraben Linie mit ber Parabel zu finden.

Die Gleichung ber gegebenen geraben Linie fel y = ex+8.....(1).

Alsbann werben bie Coprdinaten bes Punttes ober ber Puntte bes Durchschnitts mit ber Parabel bestimmt werben konnen, wenn man biese Gleichung mit ber Gleischung

$$y^2 = 4mx \dots (2)$$

verbindet. Substituirt man in (2) ben aus (1) abgeleisteten Werth von x, so hat man == ----

$$y^{2} = 4m \cdot \frac{y-4}{4}$$

$$y^{2} - \frac{4m}{4}y + \frac{4ms}{4} = 0$$

ober

Diese quabratische Gleichung giebt zwei Merthe von y, welche in (1) substituirt zwei correspondirende Werthe für x geben; baraus konnen die verlangten Coordinaten bestimmt werden.

Wenn die beiben Wurzeln ber huabratischen Gleich chung gleich find, so fallen die Durchschnittspunkte zusams men, und die gerade Linie wird die Passbel berühren; und wenn die beiden Wurzeln imaginair find, fallt bie gerade Linie ganzlich außerhalb ber Parabelit

Darauslift klar, bag eine gerabe Linie bie Parabel in nicht mehr als in zwei Punkten foneiben kunmer wie eine Dellig ber in bie

Der Theil der zensden Linie, welcher innerhalb ber Parabel liegt, heißt Sehne; wenn sie durch ben Focus, geht, heißt sie Focal's Sehne.

S... Die Gleichung einer geraben Linier ju finben, welche bie Parabel in einem geget benen Duntte berührt.

Es seien x', y' die Coordinaten bes gegebenen Punter tes, und x", y" die ingend eines andern Puntses in bers Parabel, nabe an bem erften.

Dann ift bie Bleichung bet geraben Linke, bie burch " biefe zwei Puntte gezogen wirb, und bie Parabel schneibet

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$$
,...,(1)

Da aber biese Punkte in ber Parabel liegen, hat man: (1.1) Som and (2.11) was beide beide bei ber beide bei bei

$$y'^2 = 4mx',$$

und

 $y''^2 = 4mx'';$ 

baher

 $y''^2 = 4m(x''-x');$ 

also

 $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{4m}{x''+y''}$ 

baber wird die Gleichung (1) burch Gubftitution

$$y-y'=\frac{4m}{y''-y'}(x-x').$$

Wan nehme nun an, ber Punkt (x", y") falle mitt bem Punkte (x', y") zusammenzsso istellen and hand und die Seconce, ober schneibende Linienwird eine Tans gente.

Daher ift Me Gleichung ber Kangente

$$y-y'=\frac{2m}{v'}(x-x'),$$

in welcher x', y' die Coordinaten des Berührungspunktes, und x, y die veränderlichen Coordinaten eines beliebigen Punktes in den Tangente find.

§. 53. Busat. Die Gleichung ber Tangente kann unter einer bequemern. Form bangeftells werben; benn mulstiplicirt man beibe: Geitem mit pe, fo hat man

$$yy'-y'^2 = 2mx+2mx', 1$$
aber  $4mx'$ ;  $4mx'$ ;  $2mx$   $4mx'$   $2mx'$   $2mx$   $2mx$ 

welches bie um meiften gebrauchliche Form ift.

§. 54. Den Durchschnitt ber Langente mit ber Ure'au finben. (Fig. 22.)

1. 5 h M. . . .

In ber Gleichung

yy' = 2m'(x+x)

sei y = 0, wie z. B. in T, bann ift x+x' = 0, ober  $\mathbf{x} = -\mathbf{x}' : \emptyset \times_{\mathbf{x} \sim \mathbf{X}}$ 

AT WARE

und had the indem bas negative Zeichen blog angeigt, bas AT in ber entgegengefesten Richtung bon AM muß genommen werben.

§. 55. Bufat 1. hieraus folgt MT = 2MA. Erflarung. Die Linie MT gwifthen bem gufs

puntte ber Orbinate und bein Puntte, wo bie Tangente' Die Ale fchnelbet, heißt Gubtangente, ""

🔭 Es érgiebt lich Vaher, baffbié Subtanis gente gleich ift ber boppelten Abfeiffer けいさ 付きほうきょうせいかん

S. 56. Bufat 2. hieraus lagt fich eine einfacht Dethobe ableiten, an einen gegebenen Punit ber Barabel eine Tangente gut gleben.

Co fei P ber gegebene Puntt, und AM, PM feine" Coordinaten; in ben beellungerten MA inimm AT = AM, !! verbinde T und P, bann berührt TP bie Parabet in Pi

Erklarung. Die gerabe Linie, welche im Beruhringspimite fenfreiht auf bie Langente gezogen wirb, beige bie Rormatel & Co

V &. 57. Die Steichung ber Normale gu finben.

Es berühre TP die Barabel in P. und von biesem Puntte ziehe Pg fentrecht auf PT.

Da nun Pg fentrecht zu PT ift, beren Gleichung ift

$$y-y'=\frac{2m}{y'}(x-x')$$

fo wird die Gleichung von Pg fein -

$$y-y' = -\frac{y'}{2m}(x-x').$$

§. 58. Den Durchschnitt ber Normale mit ber Aregu finden.

Wenn die Normale die Uze schneidet, wie in G, bann ist y = 0:

also 
$$-y' = -\frac{y'}{2m}(x-x')$$

daher d. h. x-x'=2m;AG-AM, ober MG=2m.

Erflarung. Die Linie MG, zwischen bem Zuß ber Orbinate und bem Puntte, wo die Normale die Are schneibet, heißt die Subnormale.

hieraus ergiebt fich, baf bie Subnormale gleich ift ber halfte bes hauptparameters.

Wir haben die Normale angesehn, als die unendliche Linie Pg, aber gewöhnlich ist dieser Name der geraden Linie PG zu geben, welche zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte der Are liegt, in welchem Pg die Are schneidet.

§. 59. An eine Parabel eine Tangente von einem gegebenen Punkte (x", y") außerhalb bere felben zu ziehn.

Es seien x', y' bie unbekannten Coordingten bes Beruhrungspunktes.

Da die Gleichung ber Tangente allgemein ift's

$$y = \frac{2m}{y'} (x + x'),$$

und ber Punkt (x", y") nach ber Annahme ein Punkt in ber Tangente ift, fo hat man

$$y'' = \frac{2m}{y'} (x'' + x') \dots (1).$$

Da auch ber Berkhrungspunkt (x', y') ein Punkt in ber Parabel ift, so ift auch

 $y'^2 = 4mx' \cdot \dots \cdot (2);$ 

hieraus, burch Sulfe ber zwei Gleichungen, konnen bie Coorbinaten x', y' bes Berkhrungspunktes bestimmt werden.

Da bie Gleichung welche fich burch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grabe ift, so folgt, daß es zwei Berührungspunkte giebt, ober, daß von einem Punkte außerhalb der Parabel zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden konnen.

Mann kann jeboch zugleich, wie in (§. 41.) bie Lage ber Berkhrungspunkte bestimmen, indem man die Derter von (1) und (2), in welchen x', y' die veranderlichen Erbften find, construirt.

Rum ist uber ber Ort von (2) die gegebene Parabel und ber von (1) ist offenbar eine gerade Linie, beren Lage bestimmt werden kann, wenn man nach und nach x' und y' = 0 sest. (§. 11.)

Wenn 
$$\mathbf{x}' = \mathbf{0}$$
, so ist  $\mathbf{y}' = 2m\frac{\mathbf{x}''}{\mathbf{y}''}$ 

fein.

y' = 0, so iff x' = -x'',

Hiernath.\*) nimm AM in der entgegengesetzten Lage zu  $\Delta X = x''$  und in AY nimm  $\Delta N = 2m \frac{x''}{y''}$ ; verbinde M, N und lasse MN die Parabel in dem Punkte P, p schneiden; dies werden die gesuchten Berührungspunkte

<sup>&</sup>quot;) Siebe Fig. in S. 41, welche leicht fur bie Parabel umgeandert werben fann.

S. 60. Zusag 1. Da bie gerabe Linie, welche oben construirt worden ist, burch ihren Durchschnitt mit ber Parabet bie Berührungspunkte bestimmt, so folgt, bag bie Gleichung

 $y'' \cdot y' = 2m (x' + x'),$ 

im melder z' und y' bie Beranderlichen find, bie Gleischung ber unendlichen geraben Linie ift, bie bie Berühreungspunkte verbindet.

100

problem of the contraction

ik, so wird 68 basselbe bleiben für alle Punkte, beren Absschiffen == x!! Kind, d. h. für alle Punkte in der unendslichen Linie Qq, die von Q senkrecht auf AX gezogen ist. Gleraud folgt der Lebrsaß:

Wenn von verschiebenen Punkten einer gur Axe fenkrechten Linie Tangenten Daare an die Parabel gezogen werden, so werben bie Sehnen, welche die Bewührungspunkte jeben Puares verbinben, alle burch benselben Punkt gehn.

§. 62. Zufat 3. Ift die gegebene Linie die Dis rectrix, so ist x" = - m, baher AM = m = AS; baher werden in diesem Falle alle Sehnen durch den Fos cus gehn. Daber ift die Gleichung der Focal-Sehne der Berührung

y''y' = 2m (x' - m).

#### 3meites Rapitel.

Bon ber Parabet, bezogen auf ben Focus.

ses fa 63. Die Entfernung irgendeines Punts tes in ber Parabel vom Focus zu finden.

Es feien x, y bie Coordinaten bes gegebenen Punte tes, und r die gesuchte Entfernung, so ift allgemein die Entfernung irgend zweier Puntte (x, y) und (x', y') nach §. 26.

$$= V \left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}.$$

Da nun ber Focus ein Punkt in der Ax ist, so ist y' = 0, und x' = AS = m; daher durch Substitution

$$r = V \left\{ x-m\right)^{2} + y^{2} \right\}$$

$$= V \left\{ (x-m)^{2} + 4mx \right\}$$

$$= V \left( x + m \right)^{2}$$

$$= x + m$$

wie verlangt wurde.

§. 64. Die Polargleichung ber Parabel gu finden, wenn ber Focus ber Pol ift. (Fig. 23.)

Es sei P irgend ein Puntt, beffen Coordinaten find AM, MP; es sei SP = T. Wintel ASP1 = ".

Mun nach (63) r = m + x, aber r = AM = AS + SM x = m + SP cosin PSM= m - r cosin w; baber burd Substitution

$$r = 2m - r cosin *;$$

b. b. 
$$r = \frac{2m}{1 + \cos n} \cdot \dots \cdot (1)$$

ober 
$$r = \frac{m}{\cosh^2 \frac{\sigma}{2}} \dots (2)$$

§. 65. Bufag 1. Wenn PS berlangert wirb, bis es die Parabel in p trifft, und Sp bezeichnet wird burch r', so ist, ba ASp == =

$$r' = \frac{2m}{1 - \cos \theta}$$

ober

$$r' = \frac{m}{\sin^2 \frac{\sigma}{2}}.$$

§. 66. 
$$\beta n \lceil a n \rceil 2$$
. Heraus
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1 + \cos n}{2m} + \frac{1 - \cos n}{2m} = \frac{2}{2m}$$

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SH} = \frac{2}{SL}$$

øber

b. h. ber halbe Sauptparameter ift bas harmonische Dittel zwischen ben Abschnitten irgend einer Sehne, bie burch ben Focus geht.

§. 67. 
$$\beta u \mid a \notin 3$$
.  $\Delta a \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{r + r'}{rr'}$  and  $= \frac{2}{2m}$ :

.rr'=m(r+r'),fo iff

$$SP, Sp = m \cdot Pp.$$

§. 68. Wenn von bem Berührungspuntte zwei gerabe Linien gezogen werben, eine parallel ber Are, und bie andere nach dem Frens, so machen sie mit ber Tangente gleiche Winkel. (Fig. 24.)

Es sei TP eine Tangente, von P ziebe PX' parallel zur Ax, und verbinde PS; ber Winkel tPX' = SPT. Denn ba AT = AM, 335.

ST = SA + AT = m + x = SP....(§.63.)

so ift Wintel SPT = Wintel STP,

= tPX'

weil PX' parallel gu AX ift.

g. 69. Die Langente irgent eines Punktes, und die Senkrechte, die man vom Focus auf bieselbe zieht, schneiben AY in bemfelben Punkte. (Fig. 25.)

Es sei PQ eine Tangente an P, von S ziehe bie Sentrechte SQ auf dieselbe; es ift also zu beweisen, bag Q ein Punkt in AY ift.

Die Gleichung für PQ ift 331 55

$$y = \frac{2m}{y'} (x + x') \dots (1),$$

und die Gleichung für SQ, von S(x = m, y = 0) sents recht zu PQ gezogen ist (§. 19.)

$$y = -\frac{y'}{2m}(x-m)\dots(2).$$

Wenn nun PQ, und SQ bie AY treffen, fo muß x == 0 in beiben Gleichungen fein, man hat baber aus (1)

$$y = 2m \frac{x'}{y'} = 2m \frac{y'^2}{4my'} = \frac{y'}{2},$$

und aus (2)  $y = \frac{y'}{2}$ ;

ba nun diese Werthe von y ibentisch find, so treffen PQ und SQ die AY in bemfelben Puntte.

Bufatz Man nehme an, PQ treffe. M. in T, fo ift, weil SQT ein rechter Winkel ift

$$ST \cdot SA = SQ^2$$

ober ba ST = SP, fo ift

41 2

 $SP \cdot SA = SQ^2$ .

§. 70. Wenn zwei Linien vom Focus gezogen werden, eine nach dem Berührungspunkte, und die andere nach dem Punkte der Directrix, in welchem die Langente diese trifft, so sind beide auf einander fenkrecht. (Fig. 26.)

Es treffe die Tangente an P (x', y') die Directrix EQ in Q, so ist, wenn man SP, SQ zieht, erforderlich, zu beweisen, daß SP sentrecht auf SQ.

Da bie Gleichung ber Tangente ift

$$y = \frac{2m}{y'}(x) + x', \quad y_i = \sqrt{2}$$

und da, wenn fie die Directrir trifft, x = - m ift, fo ift

y oder EQ = 
$$\frac{2m}{y'}$$
 (x'-m).

Nun ist die Gleichung für SQ y = — tang QSE (x — m),

$$= - \text{ tang QSE } (x - m)$$

$$= - \frac{QE}{2m} (x - m),$$

b. b. 
$$= -\frac{x'-m}{y'} (x-m) - ... (1).$$

Ferner, bie Gleichung fur SP ift

$$y = tang PSX (x - m),$$

$$= \frac{PM}{MS} (x - m),$$

b. b. 
$$=\frac{y'}{x'-m}(x-m)...(2);$$

vergleicht man baber die Coefficienten in (1) und (2) so folgt (§. 20.), daß SP sentrecht auf SQ ftebt.

Der Satz kann auch noch bawiesen werden, wenn man die Gleichung für die Focale Sehne der Berührung anmendet. Denn da diese Gleichung (§. 62.) ist

$$y'=\frac{2m}{v''} (x'-m),$$

und die Gleichung für SQ

$$y = -\frac{QE}{ES}(x - m),$$

ober

$$=-\frac{y''}{2m}$$
 (x - m), by QE = y'',

so folgt, daß SQ auf SP senkrecht ist.

## Drittes Rapitel.

Bon ber Parabel auf irgend einen beliebigen Diameter bezogen.

S. 71. Den Ort ber Mittelpuntte lirgend' einer beliebigen Unzahl paralleler Sehnen zu finden.

Es sei Pp (Fig. 27. a. b.) irgend, eine Seine, O ihr Mittelpunkt; von ben Punkten P, O, p ziehe die Senkrechten PM, ON, pm. auf die Are AX; wenn als bann die Gleichung fur Pp ist

so wird die Gleichung, die bie Werthe von y an ben Punkten P, p enthalt, sein

$$y^2 - \frac{4m}{\pi}y + \frac{4m\beta}{\pi} = 0.$$
 (§. 51.)

Da nun in jeber quabratischen Gleichung, ber Coefficient bes zweiten Gliebes, mit feinem eigentstamlichen Zeichen, gleich ift ber Summe ber Wurzeln mit ihren veranberten Beichen, fo ift

$$\frac{4m}{4} = PM + pm.$$

Da aber O ber Mittelpunkt von Pp ift, so ift

$$ON = \frac{PM + pm}{2}$$
 in Fig. a.

$$b. b. = \frac{2m}{4}$$

Nun ist m unveränderlith, und » bleibt baffelbe für alle Sehnen parallel zu Pp (18), baber ift der Werth von ON unveränderlich; mit andern Worten, wenn ON durch y bezeichnet wird, so ist die Gleichung für die Witztelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen

y = const,

beshalb ist ber gesuchte Ort eine gerade, ber Ax parallele Linie.

Erklarung 1. Die gerabe Linie, von ber oben bewiesen ift, bag fie eine beliebige Anzahl paralleler Sehnen halbirt, heißt ein Diameter.

Erklarung 2. Jebe Halfte ber fo halbirten Sehne beißt eine Orbinate bes halbirenben Diameters.

§. 72. Jusat 1. Die Diameter ber Parabel find parallel zur Are, und schneiben bie Kurve nur in einem Puntte.

Die Wahrheit bes ersten Theiles bes Zusatzes ift aus bem Satze klar; bie bes zweiten Theiles kann so gezeigt werben.

Wenn c irgend eine constante Größe ist, so ist die Gleichung irgend eines Diameters y = c; der Durchsschmitt des Diameters, mit der Parabel wird daher bes stimmt werden konnen, wenn man diese Gleichung mit der Gleichung y² = 4mx combinist.

Man hat also  $c^2 = 4mx$ b. h.  $\dot{x} = \frac{c^2}{4}$ 

baber giebt es nur einen Durchschnittspunkt.

§. 73. Bufat 2. Wenn bie Gleichung irgend einer Gebne ift

y = ax + b......(1); so wird die Gleichung inzend eines Diameters, der durch irgend einen Punkt (x', y') derselben Sehne geht und halbirt, sein, nach (§. 71.)  $y' = \frac{2m}{a}$ ....(2).

Umgekehrt, da a  $=\frac{2m}{y'}$  ift, wird die Ordinate bed Diameters, der durch den Punkt (x', y') geht,, zu ihrer Gleichung haben

 $y = \frac{2m}{y'} x + \underline{b'} \cdot \dots (3).$ 

§. 74. Zusatz 3. Bergleicht man Gleichung (3) mit der Gleichung der Tangente an den Punkt (x', y') (. 52.), so ist klar, daß die Tangente an den Scheikel irgend eines Diameters gezogen, parallel ift zu der Ordin nate besselben Diameters.

§. 75. Die Gleichung ber Parabel zu finsten, wenn fie auf irgend einen Diameter, und bie Tangente an ihrem Scheitel, ale Aren, bergen wirb. (Fig. 28.)

Es fei PX' irgend ein Diameter, und PY' bie Tanagente an feinem Scheitel, so nimm Q irgend einen Punkt in ber Parabel, und ziehe QM. fentrecht zu AX, und QV parallel zu PY'; von P ziehe bie Sentrechte PB auf AX.

Nimm AM = x, QM = y; PV = x', QV = y', eben so sei AB = x,  $BP = \beta$ , und der Winkel Y/PX' = 9.

Es ift nun die Absicht, bas Berhaltniß zwischen x' und y' zu beftimmen.

Allgemein ist (§. 46.) y² = 4mx....(1).

When  $y = MN + NQ = \beta + y' \sin \beta$ ,  $x = AB + BM = * + x' + y' \cos \beta$ ;

beshalb durch Substitution in (1) .

 $(s + y' \sin s)^2 = 4m (s + x' + y' \cos s)$ , ober entwickelt, und bas Resultat nach ben Dimensionen von y' geordnet,

 $y'^2 \cdot \sin^2 9 + 2(\beta \sin 9 - 2m \cos 9) y' + \beta^2 = 4m_4$ 

aber ba (a, a) ein Punkt in ber Parabel ift, fo hat man bie Gleichung (1),

 $\dot{s}^2 = 4ma$ ,

 $\tan \theta = \frac{2m}{4} (\S. 52.);$ 

$$y'^2 = \frac{4m}{\sin^2 x} x' \dots (3)$$

aber Mintel ASP + 2  $\mathfrak{s} = \star$ ; also  $\mathfrak{s} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} ASP$ ;

baher  $\frac{m}{\sin^2 9} = \frac{m}{\cos^2 \frac{1}{2} \cdot ASP} = SP (\S, 64.)$ 

baher buch Substitution in (3)  $y'^2 = 4SP \cdot x'$ ,

welches bie verlangte Gleichung ift.

Erklarung. Wenn irgend ein Diameter mb bie

Langente in finem Scheitel als Anen ber Coordinaters angenommen werben, fo heißen fie confugirte Aren.

§. 76. Bu fag 1. Hieraus alfo, indem man bie Accente negläße, und SP burth m bezeichnet, ergiebt fich bie Gleichung ber Parabel, bezogen auf einen beliebigen Diameter

Erflarung. Die Doppelordinate, welche burch beie Focus geht, heißt ber Parameter bes jugehorigen Diasmeter; hieraus:

mai & 7%. Bufat 2. Der Patameter eines beliebigen Diameters' ift gleich: ber vierfachen Entfernung feines Scheitels vom Fogis:

jeden Punkt der Paradel, das Quadrut der Ordinatengleicht ift bem Pufanctur, multiplicite mit ber dazu geschigen Whiciffe, Glebei (§. 50.)

Darabel auf: einen beliebigen Diaineter bezogen ift, wenn bie barabel auf: einen beliebigen Diaineter bezogen ift, vont berfelben Form, wie vorher, namlich

$$y = \frac{2m}{v} (x + x),$$

indem der Coefficient 2m in diesem Falle das Verhältnist der Stinis der Winkel, welche die Tangente mit den Uren von x und y bildet, bezeichnet. 2188; 7.)

x trifft, dann ist y = 0; also x = - x;

b. 6. die Subtangente wird burch bie Auroen halbirt, die Coordinaten mogen rechtwinklicht ober schief sein. Siehe (§. 55.)

S. 81. Jufat, 2. hieraus folgt auch, baß, welsches auch immer die Reigung ber Aren sei, die Gleichung irgend einer Ordinate eines Diameters, ber durch rinen: Punkt (x' y',) geht; ift

$$y = \frac{2m}{y'} \times + \beta. \quad \text{Siehe (§. 73.)}$$

§. 82. Wenn von verschiebenen Puntten einer ber Lage nach gegebenen Linie, Tangensten-Paare an die Parabel gezogen worden, so werben die Linien, die die zusammengehörigen Berkhrungspunkte verkinden, alle durch bensselben Punkt gehn.

ber Parabel; burch irgend einen Punkt in AX bie Are ber Parabel; burch irgend einen Punkt in AB ziehe die Gehne mn parallel zu MN. Es sei ferner PX' ber Diameter, welcher die Sehne halbirt, und sich ben Scheitel P lege die Tangente PX'; welche (§1 74.) zu MN parrallel sein wird.

Dann ift die Gleichung der Parabel, bezogen auf die schiefen Axen PX' und PY' (§. 76.)

y² = 4mx ......(1); wird nun von irgend einem Punkte in MN (x², y²) ein Tangenten-Paar an die Paredel gezogen, so kann genauwie in §. 59., welches ein besonderer Fall der in Bertrachtung gezogenen Aufgabe ist, bewiesen werden, daß die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

$$y'' \ y' = 2m \ (x' + x'') \dots (2),$$

worin x' und y' die veranderlichen Coordinaten bes Berabrungspunttes find.

Es schneibe bie Sehne (2) die Are ber x, so ift y' = 0, und baber x' = -x''; biernach wird der Durchschnittspunkt berselbe bleiben für alle Punkte, beren Abscissen = x'' sind, d. h. für alle Punkte in der gegebenen Linie MN.

§. 83. Wenn von bem Durchschnittspuntte zweier Tangenten ein Diameter gezogen wird, so halbirt er bie Linie, welchebie Berührungspuntte verbinbet.

Denn die Gleichung einer Ordinate für einen Dias meter, ber burch (x", y") geht, ift (§. 73.)

$$y = \frac{2m}{y''} x + \beta \dots (1),$$

und bie Gleichung ber Linie, welche bie Beruhrunges puntte verbindet, ift

$$y' = \frac{2m}{y''} (x' + x'') \dots (2);$$

baber ift bie lettere, indem fie der erften parallel ift, auch eine Ordinate, und wird baber halbirt.

S. 84. Wenn burch irgend einen Punkt ins nerhalb ober außerhalb einer Parabel zwei gerabe, ber Lage nach gegebene Linien, gezos gen werben, so baß sie die Kurve treffen, so wird das Rechtect aus den Abschnitten der einen, zu dem Rechtecte aus den Abschnitten ber andern, in einem beständigen Berhältnisse sein. (Kig. 29.)

Es sei O irgend ein Punkt innerhalb ber Parabel RAr, und burch biesen Punkt werben zwei gerabe Linien,

deren Lage gageben ift, gezogen, so bas sie die Kunven in Rr, und Q, q tressen; so ist zu heweisen, bas bas Berhalung. OR • Or ; QO • qo ein gegebenes sei.

Durch O ziehe ben Diameter PX', es sei PY' eine Tangente an P, ziehe RM parallel zu PY', und seige PM = x, MR = y; so ist die Gleichung ber Parabel, bezogen auf PX' und PY' nach (§. 76.)

$$y^2 = 4mx \dots (1).$$

Seise OR = r, PO = 3, 
$$\frac{\sin r, x}{\sin x, y}$$
 = p,  
 $\frac{\sin r, y}{\sin x, y}$  = q \*).

(e iff 
$$y = pr$$
,  $x = 3 - qr$ ,

d. h.

baher burch Substitution in (1)

$$p^{2}r^{2} = 4m\lambda - 4mqr$$
,  
 $r^{2} + \frac{4mq}{p^{2}}r - \frac{4m\lambda}{p^{2}} = 0$ ,

worin die beiden Werthe von r find OR und Or; nach ber Theorie ber Gleichungen baher

OR · Or = 
$$\frac{4m}{p^2}$$
.

Auf gleiche Weise ist, wenn  $Q = r', \frac{\sin r', x}{\sin x, y} = p',$   $\frac{\sin r', y}{\sin x, y} = q',$ 

<sup>\*)</sup> Die Symbole sin r, x, sin r, y, sin x, y sollen bie Sinus der Winfel bezeichnen, welche durch r und die Age der x, burch r und die Age der y, und durch die Agen x und y gebildet werden.

# $OQ \cdot Oq = \frac{4m}{p'^2}$

b. h. OR · Or ;  $QQ \cdot Qq = p'^2 : p^2$ ; ba aber die Lage von r, r' nach ber Annahme gegeben ift, so sind die Größen  $p^2$ ,  $p'^2$  bekannt, und daher sind diese Rechtede zu einander in einem gegebenen Verhälts nisse.

## Biertes Rapitel.

#### Bermifchte Gabe.

§, 85. Wenn eine Parabel in einer Ebene gegeben ift, die Lage ihrer Ure zu finden. (Fig. 30.)

Ziebe zwei beliebige parallele Sehnen Pp, Qq, und halbire sie in M, N; bie gerabe Linie, welche M, N versbindet, ift ein Diameter. (§. 71.)

In diesem Diameter nimm einen beliedigen Punkt C, und durch C ziehe RCr senkrecht zu MN, welche die Parabel in R, r trifft. Wenn nun Rr in O halbirt und AOX parallel zu MN gezogen wird, so ist dies bie verlangte Are, wie au sich klar ist.

§. 86. Es fei Pp irgend eine Sehne, welche die Are in O fcneibet; es feien ferner AM, Am beziehungsweise die Abscissen von P und p; zu beweisen, daß nun

AM · Am =  $AO^2$ . (Fig. 31.) Es sei die Gleichung zu Pp y = ax + b . . . . (1), fo werben bie Absciffen AM, Am gefunden werben, ins bem man y aus biefer Gleichung und aus

$$y^2 = 4mx \dots (2)$$

eliminirt. Man hat baber

$$(ax + b)^2 = 4mx$$

ober 
$$a^2x^2 + (2ab - 4m)x + b^2 = 0$$
,

ober 
$$x^2 + 2 \cdot \frac{ab - 2m}{a^2} x + \frac{b^2}{a^2} = 0;$$

Daher nach ber Theorie ber Gleichungen AM · Am  $=\frac{b^2}{a^2}$ . Aber in bem Punkte O, wo Pp die Axe schneis bet ist y=o,

b. b. 
$$x = -\frac{b}{a} = AO$$
,

b. b. 
$$\Delta O^2 = \frac{b^2}{a^2} = \Delta M \cdot \Delta m$$
,

wie zu beweisen war.

§. 87. In ber Ax einer gegebenen Parabel einen Punkt O zu finden, so daß, wenn' irgend eine beliebige Sehne POp durch benfelben gezogen wird, ber Winkel PAp ein Rechter sei. (Fig. 31.)

Denke AP, Ap gezogen, so wird, ba fie nach ber Unnahme einen rechten Winkel bilben, wenn bie Gleischung fur AP ift

$$y = ax \dots (1)$$

bie Gleichung fur Ap nach (§. 20) fein

$$y = -\frac{1}{a} \times \dots (2).$$

Es feien die Coordinaten von P, x', y' und die von p, x", y"; fo werben diefe Coordinaten bestimmt werden

tonnen, wenn man y aus (1) und (2) und ber Gleischung ber Parabel

$$y^2 = 4mx \dots (3)$$

eliminirt. Dan erbalt bann

$$a^2x'^2 = 4mx'$$
; b. b.  $x' = \frac{4m}{a^2}$  and  $y' = \frac{4m}{a}$ ,

and 
$$\frac{x''^2}{a^2} = 4mx''$$
; b. b.  $x'' = 4ma^2$  unb y''

biernach ift bie Gleichung fur Pp (§. 14)

$$y - \frac{4m}{a} = -\frac{4ma + \frac{4m}{a}}{4ma^2 - \frac{4m}{a^2}} (x - \frac{4m}{a^2}),$$

= → 4ma:

ober, indem man Zähler und Renner burch  $4ma + \frac{4m}{a}$  bividirt

$$y - \frac{4m}{a} = -\frac{1}{a - \frac{1}{a}} \left(x - \frac{4m}{a^2}\right)$$

Nun nehme man an, Pp schneibe AX, 3, B. in O, bann ift y = 0, und

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^{\frac{4m}{a}} = x - \frac{4m}{a^2}$$

b. h. x ober AO = 4m,

woraus folgt, baß ein Punkt, beffen Entfernung vom Scheitel gleich ift bem Parameter, bie oben ausgesprochene Eigenschaft hat.

S. 88. Wenn angenommen wird, bag fich Tangenten=Paare an ber Parabel unter rech= ten Binteln ichneiben, ben Ort ber Durch= schnittspuntte zu finden.

Es sei  $y = \alpha x + \beta \dots (1)$ , bie Gleichung einer Linie, welche bie Parabel ichneibet,  $y^2 = 4mx \dots (2),$ bann ift bie Gleichung, welche bie Werthe von y an ben

Durchschnittspunkten enthalt (§. 51.)

$$y^2 - \frac{4m}{a}y + \frac{4ms}{a} = 0 \dots (3);$$

aber wenn biefe Berthe gleich find, wird bie fcmeibenbe Linie eine Zangente; beshalb ift in biefem Falle Gleidung (3) ein volltommenes Quabrat, beren Gigenichaft ift, bag bas vierfache Produtt bes letten Gliebes gleich ift bem Quabrate bes Coefficienten bes mittlern Gliebes. Man bat baber

$$16\frac{m_{\beta}}{a} = 16\frac{m^2}{a^2}$$

b. b. 
$$\frac{m}{s} = s = y - sx$$
, and (1);

b. h. 
$$m = sy - s^2x;$$

b. h. 
$$u^2 - \frac{y}{x} + \frac{m}{x} = 0$$
,

in welcher Gleichung die Werthe von (a) die trigonomes trifchen Tangenten ber Winkel find, welche bie beiben Tangenten an ber Parabel mit ber Ure machen; bas Produkt diefer Werthe =  $\frac{m}{2}$ , und auch = - 1, da nach ber Annahme bie Tangenten rechtwinklicht auf eins ander find (§. 20);

$$also \qquad \frac{m}{x} = -1$$

 $\dot{\mathbf{m}} = -\mathbf{r}$ baber ift ber Ort ihres Durchschnittes die Directrix.

# Bon ber Ellipfe.

## Erftes Rapitel. Bon ber Ellipfe, bezogen auf ihre Agen.

§. 89. Die Gleichung ber Ellipfe gu finden. (Fig. 32.)

Die Ellipse ift ber Ort eines Punttes, beffen Entsfernung vom Focus immer in einem gegebenen Berhaltsniffe kleiner ift, als die Entfernung von der Directrix.

Es sei S ver Focus, Kk die Directrix, P irgend ein Punkt in der Ellipse; durch S ziehe die unendliche Linie ESX senkrecht auf die Directrix; von P ziehe die Senkrechten PM, PQ auf EX und Kk, und verbinde P und S.

Das gegebene Berhaltnis von PS: PQ sei gleich e: 1, so daß e kleiner sei als 1; wird dann SE in A so getheilt, daß SA: AE = e: 1, so ist A ein Punkt in der Elipse.

Bon A ziehe AY sentrecht zu AX, und nimm AX, AY als die rechtwinklichten Uren, auf welche die Ellipse bezogen werden soll.

Es (ci AM = x, MP = y, und AS = m.  
Dann ift SP<sup>2</sup>=PM<sup>2</sup>+MS<sup>2</sup>=y<sup>2</sup>+(x-m)<sup>2</sup>.....(1),  
aber SP<sup>2</sup> = 
$$e^2PQ^2 = e^2 (AE + AM)^2$$
  
=  $e^2(\frac{m}{6} + x)^2$ .....(2);

baher (1) und (2) gleich gefett

$$y^2 + (x-m)^2 = m^2 + 2mex + e^2x^2;$$
  
b. b.  $y^2 = 2m (1 + e) x - (1 - e^2) x^2$   
=  $(1 - e^2) \left(\frac{2m}{1 - e} x - x^2\right),$ 

ober wenn  $\frac{m}{1-e}$  = a angenommen wirb,  $y^2$  =  $(1 - e^2)$   $(2ax - x^2)$ ,

welches bie verlangte Gleichung ift.

§. 90. Lusat 1. Halbire Aa in C, und bann in diesem Puntte x = a gesetht, b. 6. y<sup>2</sup> = (1 - e<sup>2</sup>) a<sup>2</sup>

 $y = \pm a \sqrt{1 - e^2}$ , welche immer reell ift, ba e < 1 ist.

Wenn also BCb burch C rechtwinklicht zu Aa ges zogen wirb, und beibes, CB, Cb = a  $\sqrt{1-e^2}$  genomsmen wirb, so werben B, b Punkte ber Ellipse sein.

§. 91. Bufat. Es werbe Bb mit 2b bezeichnet, bann ift

b = 
$$\pm a \sqrt{1-e^2}$$
;  
 $\sqrt{1-e^2} = \pm \frac{b}{a}$ ;

beshalb wird, burch Substitution, die obige Gleichung  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2} \dots (1).$ 

Erklarung. Die geraben Linien Aa, Bb, bezeich= net burch 2a und 2b, heißen respective die große und kleine Are; die Punkte A, a, B, b, in welchen sie die Ellipse treffen, heißen Scheitel; und der Punkt C, in welchem sie sich einander schneiden, der Mittelpunkt.

§. 92. Die Gleichung ber Ellipse gu finben, wenn die Coordinaten vom Mittelpunkte genommen werben.

Es fei P irgend ein Punkt in ber Ellipse, ziehe bie Sentrechte PM auf Aa, und nimm CM = x'. (Fig. 33.)

Mun ift die Gleichung ber Ellipfe, wenn die Coorsbinaten in A anfangen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) \dots (1),$$
  
 $x = AM = AC + CM$   
 $= a + x'$ 

aber

fubstituirt man baher biesen Werth vom x, so hat man

$$y^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} \left\{ 2a (a + x') - (a + x')^{2} \right\}$$
$$= \frac{b^{2}}{a^{2}} (a^{2} - x'^{2}) \dots (2)$$

welches bie verlangte Gleichung ift.

§. 93. Zusat 1. Last man ben Accent weg, ber nur gebraucht wurde, um die neue von der alten Absciffe zu unterscheiden, so hat man, durch Multiplication und Bersebung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots (3)$$

Bird jedes Glied burch a2b2 bivibirt, so hat man

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \cdot \dots \cdot (4).$$

Bon ben letten Gleichungen ift bie mit (3) bezeichnete bie gebrauchlichfte.

§. 94. Bufat 2. Die Gleichungen (1) unb (2) bracen, übersett in die geometrische Sprache, eine Gisgenschaft ber Ellipse aus.

Denn wenn P irgend ein Elipsen-Punkt ist, so hat man  $2ax - x^2 = (2a - x) x = AM \cdot Ma$ , und  $a^2 - x'^2 = (a + x') (a - x') = AM \cdot Ma$ ; daher  $MP^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \cdot AM \cdot Ma$ .

ober AM · Ma: MP2 = AC2: BC2;
b. h.: bas Rechteck aus ben Abschnitten ber großen Axe verhalt sich zu bem Quabrate ber Ordinate, wie bas Quabrat ber halben großen Axe zum Quadrate ber halben kleinen Axe.

§. 95. Zusay 3. Wenn a = b, so werben Gleichung (1) und (2)

$$y^2 = 2ax - x^2$$
, und  
 $y^2 = a^2 - x^2$ .

welche nach (§. 33.) einen Rreis bezeichnen, beffen Rabins = a ift, und welcher beshalb über ber großen Are als Diameter beschrieben ift. Daraus ift klar, daß der Kreis eine Gattung ber Elipse ift.

Wenn also hiernach die Ordinate verlangert ges bacht wird, bis sie bem Kreise, der über der großen Are beschrieben ift, im Punkte Q begegnet, so ift

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

S. 96. Die Geftalt ber Ellipse aus ihrer Gleichung zu beftimmen. (Fig. 34.)

Nimmt man die Gleichung  $a^2v^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ 

michan and la hat men cutmoher

wieber auf, so hat man entweber

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \dots (1),$$

ober  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^a - y^2} \cdot \dots \cdot (2),$ 

Buerft, fei in Gleichung (1)

x = 0, bann ift y = \pm b = CB ober Cb.

y = o, bann ift x = ± a = CA ober Ca.

Ferner x < = a, bann giebt, es fur jeden Werth von x zwei gleiche Werthe fur y mit entgegengesetzten Zeichen.

Es sei x = ± a bann ist y = ± 0; b. h. die Ellipse schneibet die Aren ber x in ben Punkten A und a.

bann wird die Große unter bem Burzelzeichen negativ, die Werthe von y find imaginair, und kein Punkt ber Ellipse kann jenseits a zur Rechten, ober über-A hinaus zur linken liegen.

Daber ift klar, bag bie Ellipse eine zusammenhangende Kurve ift, die in sich selbst zuruck lauft, und durch die große Ure Aa in zwei congruente Theile getheilt wird.

Auf dieselbe Art kann, wenn man Gleichung (2) untersucht, gezeigt werden, daß die Ellipse vie oben angegebene Form hat, und daß sie durch die kleine Are in zwei congruente Theile getheilt wird.

S. 97. Bufat 1. Der Abftanb bes Mittelpunttes vom Tocus

= CS = AC - AS = a - a (1 - e) = ae. Diese Größe heißt bie Eccentricität ber Ellipse.

§. 98. Bufat 2. Den Berth ber Orbinate burch ben Focus ju finden.

Werm die Orbinate burch ben Focus geht, fo ift

b. h.  $y = \pm \frac{b^a}{a} = SL$  ober Sl.

Die Doppelordinate Ll, die burch ben Focus geht, heißt der Hauptparameter ober latus rectum.

§. 99. Bufat 3. Wenn in ber Gleichung a2y2 + b2x2 = a2b2,

x in y, und y in x verwandelt wird, oder mit andern Worten, wenn man die Lage der Aren umkehrt, bann ergiebt sich,

 $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$ ;

bie nahere Betrachtung bieser Gleichung wurde auf bies selbe Gestalt der Ellipse leiten, wie vorher. Der Grund ist klar, benn da die Ellipse symmetrisch in Beziehung auf beide Axen ist, so ist es unwesentlich, ob man die Abscissen auf CX und die Ordinaten auf CX, oder die Abscissen auf CX und die Ordinaten auf CX nimmt.

S. 100. Benn man annimmt, bie große Are werbe unendlich groß, so geht die Ellipse in die Parabel über.

Die Gleichung ber Ellipse ist (91)  $y^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} (2ax - x^{2})$   $= \frac{2b^{2}}{a} x - \frac{b^{2}}{a^{2}} x^{2} \dots \dots (1).$ 

Num iff  $b^2 = a^2 - a^2e^2$ = (a + ae) (a - ae)=  $(a + ae) \Delta S$ ;

b. b.  $\frac{b^2}{a} = (1 + e) AS;$ 

und burch Substitution in (1)

$$y^2 = 2\Delta S (1 + e) x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \dots (2).$$

Nun sei a unendlich groß angenommen, bann ist  $\frac{b^2}{a^2} = o$ , und da  $a = \frac{m}{1-e}$ , so hat man 1-e=o oder e=1; daher also durch Substitution in (2)  $y^2 = 4AS \cdot x$ ,

welches bie Gleichung ber Parabel ift.

Daraus folgt bie Bahrheit bes Sates.

§. 101. Den Durchschnitt einer geraben Linie mit ber Ellipfe zu finben.

Es fei bie Gleichung ber gegebenen Linie

$$y = *x + \beta \dots \dots (1).$$

Dann wird man ben Punkt ober bie Punkte bes Durch= schnittes mit ber Ellipse finden, wenn man biese Glei= chung mit ber ber Ellipse combinirt.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots (2).$$

Subficuire man nun in (2) ben Werth von x aus (1), so hat maiz

$$a^{2}y^{2} + b^{2} \left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right)^{2} = a^{2}b^{2};$$
b. h. 
$$(a^{2}\alpha^{2} + b^{2}) y^{2} - 2b^{2}\beta y + b^{2}\beta^{2} = a^{2}b^{2}\alpha^{2},$$
ober 
$$y^{2} - \frac{2b^{2}\beta}{a^{2}\alpha^{2} + b^{2}} y + \frac{b^{2}(\beta^{2} - a^{2}\alpha^{2})}{a^{2}\alpha^{2} + b^{2}} = 0.$$

Aus biefer quabratischen Gleichung erhalt man zwei Werthe für y, welche in (1) substituirt, zwei entsprechende Werthe für x geben; beshalb konnen die verlangten Cosorbinaten bestimmt werben.

Wenn idie beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleischung einander gleich sind, so fallen die Durchschnittsspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt die Ellipse; und find sie imaginair, so fallt die gerade Linie ganz außerhalb der Ellipse.

hieraus ift klar, baß eine gerabe Linie eine Ellipfe in nicht mehr als zwei Punkten fchneiben kann.

Erklarung. Der Theil einer geraben Linie, wels chet innerhalb einer Ellipfe liegt, heißt eine Schne; wenn bie Sehne burch ben Focus geht, so heißt sie Focals Sehn e.

§. 102. Die Gleichung einer geraben Linie zu finden,-welche die Ellipfe in einem gegebebenen Punkte berührt.

Es feien x', y' die Coordinaten bes gegebenen Punttes, und x", y" die eines andern Punttes in der Ellipfe, nabe bem erften.

Dann ift bie Gleichung ber geraben Linie, bie burch biefe Punkte gezogen ift

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \dots (1).$$

Da aber biefe beiben Punkte in ber Ellipse find, so hat man

$$a^{2}y'^{2} + b^{2}x'^{2} = a^{2}b^{2}$$

$$a^{2}y''^{2} + b^{2}x''^{2} = a^{2}b^{2},$$
baher
$$a^{2}(y''^{2} - y'^{2}) + b^{2}(x''^{2} - x'^{2}) = 0,$$
b. h.
$$\frac{y''^{2} - y'^{2}}{x''^{2} - x'^{2}} = -\frac{b^{2}}{a^{2}};$$

$$\frac{(y'' + y')(y'' - y')}{(x'' + x')(x'' - x')} = -\frac{b^{2}}{a^{2}};$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^{2}}{a^{2}} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'};$$

also burch Substitution in (1) kommt

$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'} (x - x').$$

Nun stelle man sich vor, der Punkt (x", y") falle mit (x', y') zusammen, dann ist x" = x', y" = y', und die schneidende Linie wird eine Tangente am Punkte (x', y'); daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x'),$$

in welcher x, y bie veranderlichen Coordinaten irgend eines beliebigen Punttes in der Tangente find.

§. 103. Diese Gleichung kann unter einer bequemern Form bargestellt werben, benn multiplicirt man beibe Seiten mit a2y', so hat man

$$a^2yy' - a^2y'^2 = -b^2xx' + b^2x'^2$$
,  
und versetz man die Glieder  
 $a^2yy' + bxx' = a^2y'^2 + b^2x'^2$ 

 $=a^2b^2$ ,

welches bie Gleichung ift, welche am baufigften ange-

§. 104. Den Durchschnitt ber Tangente mit ben Aren von z und y zu finden. (Fig. 35.)

Da bie Gleichung ber Tangente ift a2yy' + b2xx' = a2b2.

so mbge sie (1) die Are der x schneiben, z. B. in T; bann ist y = 0; also  $b^2xx' = a^2b^2$ ; b. s.  $x = \frac{a^2}{x'}$ 

ober  $CT = \frac{CA^a}{CM}$ .

(2) Es schneibe die Tangente die Are der y, z. B. in t; dann ist x = 0; also  $a^2yy' = a^2b^2$ ; d. h.  $y = \frac{b^2}{v'}$ ,

ober  $Ct = \frac{CB^2}{Cm}$ .

Hieraus folgt, baß jede ber halben Uren eine mitte lere Proportionale zwischen ber Abscisse eines Punktes, und bem Theile ber Ure ift, ber zwischen bem Durchschnitt mit ber Tangente und bem Mittelpunkte liegt.

§. 105.  $3u \int a dx = 1$ . Da  $CT = \frac{a^2}{x'}$ ;

fo ift mT = CT - CM  $= \frac{a^2}{x'} - x'$   $= \frac{a^2 - x'^2}{x'}$ .

Erklarung. Die Linie MT, zwischen bem Fuß ber Orbinate, und bem Puntte, wo die Tangente die Are trifft, beißt die Subtangente.

§. 106.

§. 106. Zusat 2. Da ber Werth ber Subtansgente unabhängig von ber Ordinate y' ift, so wird er berselbe bleiben für alle Ellipsen, die über berselben großsen Uxe Aa beschrieben werden; nun ist der Kreis eine Gattung der Ellipse §. 95; daher also, wenn über der großen Uxe ein Kreis beschrieben wird, und die Ordinate MP wird aufwärts verlängert, bis sie den Umfang in Q trifft, so werden Tanzgenten an P und Q gezogen, die Uxe AX in demselben Punkte T schneiben.

Erklavung. Die gerabe Linie, welche aus bem Berührungspunkte fentrecht auf ber Tangente gezogen ift, heißt Normale.

S. 107. Die Gleichung ber Rormale gu A. 35.

TP beruhre die Ellipse in P, von diesem Punkte ziehe Pg senkrecht auf PT, so daß sie CA in G, und Cb in g tresse.

Da nun Pg burch ben Punkt (x', y') geht, rechts winklicht ju PT, beren Gleichung ift

$$y - y' = -\frac{b^2 \cdot x'}{a^2 y'} (x - x'),$$

fo wird nun bie Gleichung fur Pg (§. 19.) fein

$$y - y' = \frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{x'} (x - x'),$$

worin x, y die veränderlichen Coordinaten was immer für eines Punttes in der Linie Pg find, wenn diese als unendlich betrachtet wird.

S. 108. Den Durchschnitt ber Rormale mit ben Aren von x und y ju finden.

Da ble Gleichung ber Normale ift

$$y - y' = \frac{a^2y'}{h^2x'}$$
 (x -x'),

fo moge fie zuerft bie Are ber x z. B. in G schnelben; bann ift y == 0, und

$$-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

b. h. 
$$x - x' = -\frac{b^2}{a^2}x'$$
;

b. b. 
$$x' - x = \frac{b^2}{a^2}x'$$
,

ober CM — CG, b. h. MG = 
$$\frac{b^2}{a^2}x^4$$
.

Nun schneibe bie Normale bie Are ber y, 3. B. in g; bann ift... x = 0,

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}x'$$

$$=-\frac{a^2}{b^2}y';$$

b, h, y ober 
$$C_g = -\frac{a^2 - b^2}{b^2}y'$$
.

Das negative Zeichen beutet an, daß ber Punkt g unterhalb ber Are AX liegt.

Erklarung. Die Linie MG zwischen bem Fuße ber Orbinate und bem Punkte, wo bie Normale bie Are ber x schneibet, heißt Subnormale.

Der Ausbruck Rormale wird gewöhnlich nur von ber enblichen Linie PG gebraucht. (Siehe §. 58.)

§- 109. Eine Tangente an eine Ellipse von einem gegebenen Puntte (x", y") aufferhalb berfelben zu ziehn.

Es feien x', y' bie unbefannten Coordinaten bes Beruhrungspunktes.

Da nun die Gleichung ber Tangente allgemein ist a2yy' + b2xx' = a2b2,

und ber Punkt (x", y") nach Annahme ein Punkt in ber Tangente ift, fo bat man

 $a^2y''y' + b^2x''x' = a^2b^2 \dots (1);$  auch ba ber Punkt ber Berührung (x', y') in ber Ellipse liegt,

a<sup>2</sup>y'<sup>2</sup> + b<sup>2</sup>x'<sup>2</sup> = a<sup>2</sup>b<sup>2</sup>....(2); hieraus, burch Hulfe biefer beiben Gleichungen, tonnen die Coordinaten x', y' bes Berührungspunktes bestimmt werben.

Da bie Gleichung, welche fich burch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grade ift, so folgt, baß es überhaupt zwei Berührungspunkte giebt; mit ans bern Worten, baß von einem gegebenen Punkte aufferhalb ber Ellipfe zwei Tangenten an bies felbe gezogen werben konnen.

Statt die Arbeit ber Elimination wirklich zu verrichsten, kann man, wie in (§. 41.) und (§. 50.), die Lage ber Berührungspunkte finden, wenn man die Derfer ber Gleichungen (1) und (2) conftruirt, in welchen x', y' die bie veränderlichen Größen find.

Nun ift ber Ort von (2) bie gegebene Ellipse, und ber Ort von (1), welcher eine Gleichung bes ersten Grasbes ift, ift eine gerabe Linie, beren Lage bestimmt ift, indem man x' und y' nach und nach = 0 sett.

Wenn also in ber Gleichung '

$$a^{2}y'y'' + b^{2}x'x'' = a^{2}b^{2}$$
  
 $x' = 0$ , so iff  $y' = \frac{b^{2}}{y''}$ ,

$$y' = 0$$
, so lift  $x' = \frac{a^2}{x''}$ 

Hiernach \*) nimm  $CM = \frac{a^2}{x^{1/2}}$  und  $CN = \frac{b^2}{y^{1/2}}$ , vers binde M, N; und es schneibe MN bie Ellipse in P und P, so werben bies die verlangten Berührungspunkte sein.

§. 110. Zusat 1. Da die gerade Linie MN, welche eben gezogen ift, burch ihren Durchschnitt mit ber Ellipse die Berührungspunkte bestimmt, so folgt, daß die Gleichung

a²y"y' + b²x"x' = a²b² worin x' und y' bie Beranberlichen sind, die Gleichung ber unenblichen Linie ift, die die Berührungspunkte verbindet.

§. 111. Zusat 2. Da CM unabhängig von y"
ift, so wird es daffelbe bleiben, für alle Puntte, beren Absciffen = x" sind, b. h. für alle Puntte in der un=
endlichen Linie Qq, die durch Q parallel mit CY gezogen
ist. Hieraus ergiebt sich also folgender Lehrsat:

Wenn von verschiedenen Punkten einer geraden Linie, die fenkrecht auf der Are CX ift, Tangenten=Paare an die Ellipse gezogen werben, so werden die Sehnen, die die zusammengehörigen Berührungspunkte verbinden, alle durch ein und benfelben Punkt gehn.

<sup>\*)</sup> Siehe Fig. 18.

### 3meites Rapitel

Bon ber Ellipse, auf den Focus bezogen.

S. 112. Den Abftanb irgend eines Punttes in ber Ellipfe von einem ober bem andern gocus zu finden.

Es sei ber eine Focus S, ber andere H, P irgend ein Punkt in der Ellipse; ben Werth von SP ober PH zu finden. (Fig. 36.)

(1) Bon SP.

Im Allgemeinen ift bie Entfernung zweier Puntte (x, y) und (x', y') nach §. 26.

$$= V \{ (x - x')^2 + (y - y')^2 \},$$

aber die Coordinaten von S, da es ein Punkt in der Are der x ist, sind

$$x' = ae, y' = 0.$$
 (§. 97.)  
baher  $SP^2 = (x - ae)^2 + y^2$   
 $= (x - ae)^2 + (1 - e^2) (a^2 - x^2).$   
(§. 91. unb 92.)  
 $= x^2 - 2aex + a^2e^2 + a^2 - x^2$   
 $= a^2 - 2aex + e^2x^2$   
 $= (a - ex)^2$ 

b. SP = a - ex

(2) Auf gleiche Weise kann gezeigt werben, baß
HP == a + ex.

Ertlarung. Der Abstand irgend eines Focus heißt ber Focal=Abstanb.

§. 113. Zusak. Hieraus folgt burch Abbition SP + HP = 2a = Aa.

Mit andern Worten: bie Summe ber Focal=Ab= fande von einem Punkte ist gleich ber großen Are.

Aus bieser Eigenschaft ber Ellipse kann bie Gleischung ber Ellipse abgeleitet werden, wie im folgenben Paragraphen.

S. 114. Den Ort eines Punktes zu finden, beffen Abftande von zwei feften Punkten zus fammen genommen immer der gegebenen Große 2a gleich find. (Fig. 37.)

Es feien S, H die zwei festen Puntte, P ein Puntt, beffen Ort man sucht.

Berbinde S, H, halbire SH in C, ziehe die Senkrechte PM auf HS, und verlängere HS unbegränzt nach X; von C ziehe CY senkrecht auf CX, und nimm CX
und CY als Coordinaten Aren.

Es sei CM = x, MP = y, und SC = c.  
Dann ist 
$$SP^2 = y^2 + (c - x)^2$$
,  $HP^2 = y^3 + (c + x)^2$  .....(1);  
b. s.  $HP^2 - SP^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2$ , ober  $(HP + SP)(HP - SP) = 4cx$ ;  
b. s.  $HP - SP = \frac{4cx}{2a}$   
 $= \frac{2cx}{a}$ , aber  $HP + SP = 2a$ ;

$$HP = a + \frac{cx}{a}$$

unb

$$SP = a - \frac{cx}{a}$$

Erhebt, man biefe Werthe ins Quabrat, und abbirt bie Resultate, so hat man

$$SP^2 + HP^2 = 2(a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}),$$

und auch

$$= 2(y^2 + c^2 + x^2)$$
 and (1);

baher  $y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2}$ ;

b. b. 
$$y^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2$$

$$= a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2$$

$$=\frac{a^2-c^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

welches die Gleichung ber Ellipse ift, beren große Are = 2a, und beren kleine Are = 2 Va2 - c2 ift.

Wenn x = 0, so ist y<sup>2</sup> = a<sup>2</sup> - c<sup>2</sup> = b<sup>2</sup>, b. h. b = ber Ordinate, die aus C gezogen wird.

S. 115. Die Polar-Gleichung ber Ellipfe ju finden, wenn ber Focus ber Pol ift. (Fig. 38.)

(1) Es fei S ber Pol.

Es sei SP = r, Winkel P\$A = a;

bann ift r = a - ex, (§. '112),

x = CS - SM

 $= ae - \dot{r} \cos (\pi - \omega)$ 

 $= ae + r \cos \omega;$ 

b. f.  $r = a - ae^2 - er \cos \omega$ ;

b. h.  $r(1 + e cos n) = a(1 - e^2);$ 

also 
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos a}$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

(2) Es sei H ber Pol. Es sei HP = r', und Bintel PHA = v';

bann  $r' = a + ex (\S. 112.),$ 

aber z = CM = HM - HC=  $z' \cos \omega - ae$ ;

also  $r' = a + er' eos \omega - ae^2;$ 

b. b.  $r'(1 - e \cos \omega) = a(1 - e^a);$ 

baher  $r' = \frac{a (1 - e^2)}{1 - e \cos a'}$ 

welches bie verlangte Gleichung ift.

§. 116. Jusat. Wird PS verlangert bis es die Ellipse in p trifft, so hat man, ba ber Wintel ASP

$$Sp = \frac{a (1 - e^2)}{1 - e \cos a}$$

§. 117. Bufat 2. Hieraus folgt

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{Sp} = \frac{1 + e \cos u}{a (1 - e^2)} + \frac{1 - e \cos u}{a (1 - e^2)}$$
$$= \frac{2}{a (1 - e^2)} = \frac{2}{SL}; (§§. 91. u. 98.)$$

beshalb ist ber halbe Hauptparameter ein harmonisches Mittel zwischen ben Segmenten irgend einer Focal=Sehne.

§. 118.  $3u \cdot a \cdot 3$ . Da  $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP} = \frac{SP + Sp}{SP \cdot Sp}$ 

aber auch  $= \frac{2}{a(1-e^2)}$ 

fo folge  $SP \cdot Sp = \frac{a}{2} (1 - e^2) (SP + Sp)$ .

§. 119. Die Polar=Gleichung der Ellipse zu sinden, wenn der Mittelpunkt der Polisk. Es sei CP = e, und Winkel PCA = r, Dann ist  $e^2 = x^2 + y^2$   $= x^2 + (1-e^2) (a^2-x^2)$ , (§§. 91. und 92.)  $= e^2x^2 + a^2(1-e^2)$   $= e^2(1-e^2)$   $= e^2(1-e^2)$ b. h.  $e^2(1-e^2)$   $= a^2(1-e^2)$ ; also e = a

S. 120. Bu beweifen, bag bie Focal=Ab= f ?

welches bie verlangte Gleichung ift.

an biefem Puntte gleiche Wintet bilben. " (Fig.

39.)
Es sei TPt eine Tangente an dem Punkte P (x', y'), ziehe die Normale PG, und verbinde S, P und H, P.

Dann 
$$CG = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = e^2 x';$$

mun iff  $\frac{SG}{HG} = \frac{SC - CG}{SC + CG} = \frac{ae - e^2 x'}{ae + e^2 x'} = \frac{a - ex'}{a + ex'}$ 

$$= \frac{SP}{HD}(112)$$

baher ber Winkel SPG = Winkel HPG, (Eukl. VI. 3.) Aber GPT = PGL; also SPT = HPT, was zu beweisen war

§. 121. Den Ort ber Punkte zu finden, in welchen bie Senkrechte vom Focus auf bie Tangente irgend eines Punktes, biefe Langente schneibet. (Fig. 40.)

Es sei PT eine Tangente an einem Punkte P (x', y') und SY eine Senkrechte von S auf PT, so daß sie diese in Y treffe; es soll der Ort von Y gefunden werden.

Don C ziehe die Senkrechte CQ auf die verlängerte TP, auch ziehe Sq parallel mit TP, die also CQ in q trifft.

Dann iff 
$$CY^2 = CQ^2 + QY^2 = CQ^2 + Sq^2$$
  
 $= CT^2 \cdot \sin^2 T + CS^2 \cos^2 T$ ;

aber  $CT = \frac{a^2}{x'}$  (§. 104.) unb  $CS = ae$ ;

baher  $CY^2 = \frac{a^4}{x'^2} \sin^2 T + a^2e^2 \cos^2 T$ 

$$= \frac{a^4}{x'^2} (1 - \cos^2 T) + a^2e^2 \cos^2 T$$

$$= \frac{a^4}{x'^2} - \frac{a^2}{x'^2} (a^2 - e^2x'^2) \cos^2 T \dots$$
(1).

Mun ift tang  $T = -\frac{b^2x'}{a^2y'} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x'}{\sqrt{a^2 - x'^2}}$ ;
(§. 96.)

baher  $1 + \tan^2 T = 1 + \frac{b^2x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)}$ 

$$= \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)}$$

$$= \frac{a^4 - a^2e^2x'^2}{a^2(a^2 - x'^2)}$$

$$= \frac{a^2 - e^2x'^2}{a^2 - x'^2}$$
b. 6.  $\cos^2 T = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2x'^2}$ ;

baber burch Substitution in (1)

$$CY^{2} = \frac{a^{4}}{x^{2}} - \frac{a^{2}}{x^{2}} (a^{2} - e^{2}x^{2}) \cdot \frac{a^{2} - x^{2}}{a^{2} - e^{2}x^{2}}$$

$$= \frac{a^{4}}{x^{2}} - \frac{a^{2}}{x^{2}} (a^{2} - x^{2})$$

$$= \frac{a^{2}}{x^{2}} (a^{2} - a^{2} + x^{2}) = a^{2};$$

 $CY = \pm a$ 

baher ist ber Ort von Y ein Kreis, bessen Rabius = a ist, und welcher baher über ber großen Are Aa, als Durchmesser, beschrieben ist.

§. 122. Das Rechted aus ber Sentrechten von jebem Focus auf eine Langente, ift gleich bem Quabrate ber halben fleinen Are. (Fig. 40.)

Denn zieht man bie Senkrechten SY und HZ von S und H auf bie Langente PT, bann ift

$$SY = ST \sin T$$
,

aber ST = CT - CS = 
$$\frac{a^2}{x'}$$
 -  $ae = \frac{a}{x'}$  (a -  $ex'$ );

$$SY = \frac{a}{r'} (a - ex') \sin T.$$

Auf gleiche Beise HZ = 
$$\frac{a}{T}$$
 (a + ex') sin T;

baher SY • HZ = 
$$\frac{a^2}{r^2}$$
 ( $a^2 - e^2 x^{2}$ )  $\sin^2 T$  . . . (1).

Nun ift 
$$\cos^2 T = \frac{a^2 - x'^2}{a^2 - e^2 x'^2}$$
;

$$\sin^2 T = 1 - \cos^2 T$$

$$= 1 - \frac{a^2 - x^{\ell^2}}{a^2 - e^2 x^{\ell^2}}$$

$$=\frac{x^{2}-e^{2}x^{2}}{2^{2}-e^{2}x^{2}};$$

baher burch Substitution in (1)

SY · HZ = 
$$\frac{a^2}{x^2}$$
 ( $a^2 - e^a x^{2}$ ) $\frac{x^{2}(1 - e^a)}{a^2 - e^2 x^{2}}$   
=  $a^2 (1 - e^a)$  =  $b^a$  · · (§. 91.)

#### Drittes Rapitel.

Bon ber Ellipse, bezogen auf ingenb ein Syftem conjugirter Diameter.

#### Erfter Abichnitt.

Bon conjugirten' Durchmeffern im Allgemeinen.

§. 123. Den Ort ber Mittelpunkte irgenb einer Angahl paralleler Sehnen zu finben. (Fig. 41.)

Es sei Pp irgend eine Sehne, O ihr Mittelpunkt, und X, Y seine Coordinaten.

Bon ben Punkten O, P, p, ziehe bie Senkrechten ON, PM, pm, auf die Ax, alebann ift, wenn die Gleichung fur Pp ift

$$y = \alpha x + \beta$$

bie Gleichung, welche die Werthe von y in ben Punkten P, p enthält

$$y^{2} - \frac{2b^{2}\beta}{a^{2}a^{2} + b^{2}}y + \frac{b^{2}(\beta^{2} - a^{2}a^{2})}{a^{2}a^{2} + b^{2}}$$
= 0, (§. 101.)

Da nun in jeber quabratischen Gleichung ber Coefficient bes zweiten Gliebes mit feinem eigenthamlichen Beichen gleich ift ber Summe ber Burgeln mit ben ents gegengesetten Beichen, so ift

$$\frac{2b^2 \beta}{a^2 a^2 + b^2} = PM + pm;$$

ba aber O ber Mittelpunkt von Pp'ift, so ift

$$ON = \frac{PN + pm}{2};$$

b. b. 
$$Y = \frac{b^2 \beta}{a^2 a^2 + b^2} \dots (1)$$
.

Nun ift 
$$X = \frac{1}{\epsilon} (Y - \beta)$$

b. b. 
$$= -\frac{a^2 a \beta}{a^2 a^2 + b^2} \dots (2).$$

Um bas Bethaltniß zwischen X und Y zu erhalten, muß man g aus (1) und (2) eliminiren;

b. h. 
$$\frac{a^2 a^2 + b^2}{b^2} Y = -\frac{a^2 a^2 + b^2}{a^2 a} X;$$
baher 
$$Y = -\frac{b^2}{a^2 a} X.$$

Run bleibt a baffelbe far alle mit Pp parallele Sehnen (§. 18.); baber brudt bie oben gefundene Gleischung bas Berhaltniß ber Coordinaten ihrer Mittelpunkte aus, und ba fie vom ersten Grade ift, so ift ber gesuchte Ort eine gerade Linie.

Erklarung. Die gerade Linie, von ber eben bes wiesen ift, daß sie ber Ort ber Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ift, heißt ein Diameter, und die Punkte, in welchen sie die Kurve schneibet, heisen die Scheitel.

§. 124. Bufag. Die Gleichung  $Y=-\frac{b^2}{a^2a}$  X ift bie Gleichung einer Linie, bie burch ben Anfangspunkt

geht, ber in biefem Falle ber Mittelpunkt ift; baber muß jeber Diameter burch ben Mitelpunkt gehn.

S. 125. Benn ein Diameter burch einen ges gebenen Puntt gezogen ift, bie Gleichung far irgend eine feiner Ordinaten zu finden.

Sind x', y' die Coordinaten des gegebenen Punktes, so ist die Gleichung des Diameters, der durch benselben gezogen ist  $y'=\alpha x'$ ,  $x'=\alpha=y$   $x'\in \mathcal{X}$ 

$$- y = \frac{y'}{x'} \times \dots (1).$$

Es sei  $y = ax + \beta \dots (2)$ bie gesuchte Gleichung für irgend eine Ordinate, bann ift  $\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2s}$  (124.);

$$z = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'},$$

baber hat irgend eine Ordinate bes Diameters, ber burch (x', y') geht, zu ihrer Gleichung

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} + s.$$

§. 126. Bergleicht man biese Gleichung mit ber Gleichung ber Tangente (§. 102.), so ergiebt sich, bas bie. Tangente am Scheitel irgend eines Diameters parallel ift mit ben Ordinaten bes Diameters.

S. 127. Wenn von irgend zwei gegebenen Diametern die Ordinaten bes einen parallel find bem andern, fo werden die Ordinaten bes lettern parallel fein dem erstern. (Fig. 42.)

We seem 
$$y = ax \dots (1), y' = a'x \dots (2),$$

irgend zwei Diameter, CP, CD, bann find nach bem letten Paragraphen die Gleichungen irgendwelcher Ordinaten MN, QR beziehungsweise zu bem ersten und bem zweiten

$$y = -\frac{b^2}{a^2 a} x + \beta \dots (1),$$
  
 $y = -\frac{b^2}{a^2 a'} x + \beta' \dots (2).$ 

Run nehme man an, die Ordinate MN fei parallel zu bem Diameter CD, bann ift

$$-\frac{b^2}{a^2a}=a'$$

ober 
$$\frac{b^2}{a^2a^2}$$
,

baher wird die Gleichung für QR durch Substitution in (2')  $y = \alpha x + \beta'$ ,

b. h. QR bie zweite Ordinate ift parallel bem ersten Diameter CP; mas zu beweisen war.

Daber ift jeder dieser Diameter parallet zu ben Ordinaten bes andern.

Diameter, in folcher Beziehung auf einander, heißen conjugirte Diameter.

§. 128. Bufat 1. hiernach alfo ift, wenn zwei Diameter

$$y = ax$$

$$y = a'x$$

conjugirt find

$$aa' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

§. 129. Jufut 2. Daber alfo, wenn

ein Diameter ift, so ift

$$y = -\frac{b^2}{a^2a} x$$

ber conjugirte Diameter. Die Anzahl von Paaren conjugirter Diameter ist baber unbegranzt.

Benn . = 0, ober wenn ber erfte Diameter ift Aa, bann ift

$$y = -\frac{b^2}{a^2 \cdot o} x = \infty \cdot x,$$

beshalb ift ber conjugirte Diameter zu Aa, indem er auf bemfelben rechtwinklicht ift, Bb; ober, die Aren ber Ellipfe find conjugirte Diameter.

§. 130. Bufat 3. Wenn (x', y') irgend ein Puntt in ber Ellipse ift, so ift ber Diameter, ber burch bensels ben geht

$$y=\frac{\dot{y}'}{x'}\;x,$$

b. b. 
$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{v'} x$$

ift ber entsprechenbe conjugirte Diameter. \$ 125

Aber die Gleichung ber Tangente burch (x', y') ift (§. 102.)

$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x') \dots$$
 (1),

woraus folgt, bag bie Tangente an bem Scheitel irgend eines Diameters parallel ift bem ent-fprechenben conjugirten Diameter.

§. 131. Sen ift in Jusat 2. gezeigt worden, daß bie Uren ber Ellipse conjugirte Diameter find, es soll nun

nun bewiesen werben, baß fie bas einzige Paar cons jugirter Diameter find, welche fentrecht auf einanber fein tonmen. (Fig. 43.)

Denn wo mbglich seien CP, CD ein Paar sentrechs ter, conjugirter Diameter, verschieben von ben Uren, und es sei

Winkel PCA = 9, Winkel DCA = 9'. Nun ist 9' = DCA = DCP + PCA,

 $=\frac{\pi}{2}+9$  nach Unnahme;

aber 
$$-\frac{b^2}{a^2} = aa'$$
 (128.) = tang 9 · tang 9

$$=\frac{\sin 9}{\cos 9}\cdot \frac{\sin 9'}{\cos 9'},$$

b. b. 
$$a^2 \sin 9 \cdot \sin 9' + b^2 \cos 9 \cdot \cos 9' = 0 \dots (1)$$

aber 
$$\sin 9' = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 9\right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 9\right)$$

and 
$$\cos \vartheta' = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$$

daher durch Substitution in (1)

$$(a^2 - b^2) \sin \theta \cdot \cos \theta = 0,$$

ober 
$$\frac{1}{2}(a^2 - b^2) \sin 29 = 0$$
.

Da nun a > b, so tann biese Gleichung nur richs tig fein, wenn man annimmt

b. h. 
$$s = 0$$
, oder  $= \frac{\pi}{2}$ ;

$$9' = \frac{\pi}{2}, \text{ ober } = 0;$$

baber CP und CD beziehungsweise mit CA und CB zusammenfallen muffen, und die Aren find baber die einzigen conjugirten Diameter, welche rechtwinklicht zu einzander find.

S. 132. Die Gleichung ber Ellipse zu finben, wenn sie auf irgend zwei conjugirte Diameter als Aren bezogen wirb. (Fig. 44.)

Es werden CP, CD irgend ein Spftem coningirter Diameter als Aren angenommen, nimm irgend einen Punkt Q in der Ellipse, und ziehe QM senkrecht auf CX, und QV parallel zu CY, und von V ziehe VN, VR beziehungsweise parallel zu QM, CA.

Nimm CM = x, MQ = y; CV = x', VQ = y' eben so sei CP = a', CD = b', Binkel PCA = s, und Binkel  $DCA = \varphi$ .

Der Zweck ift nun, bas Berhaltniß zwischen x' und y' zu bestimmen.

Allgemein ist  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots$  (1).

When  $x = CN - MN = x'\cos 9 + y'\cos \varphi$ ,  $y = MR + RQ = x'\sin 9 + y'\sin \varphi$ ;

Company baher burch Substitution in (1),

 $\begin{array}{lll} a^{2} (x' \sin 9 + y' \sin \varphi)^{2} + b^{2} (x' \cos 9 + y' \cos \varphi)^{2} \\ &= a^{2}b^{2}. \end{array}$ 

ober bas Resultat entwickelt und geordnet

 $(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) y'^2 + (a^2 \sin^2 \varphi) + b^2 \cos^2 \varphi) x'^2 + 2(a^2 \sin \varphi \sin \varphi + b^2 \cos \varphi) x'y'$   $= a^2 b^2.$ 

Aber in §. 128. wurde gezeigt, baß

-ill be.

130463

使ってど

and other tang 9 's tang  $\varphi = -\frac{b^2}{a^2}$ ,

und baraus  $a^2 \sin \theta \cdot \sin \phi + b^2 \cos \theta \cdot \cos \phi$ = 0; (§. 131.) Deshalb also verschwindet das Glied, welches x', y' entshalt, und die gesuchte Gleichung ist von der Form

(a² sin² \varphi + b² cos² \varphi) y'² + (a² sin² \varphi + b² cos² \varphi) x'²

= a²b² . . (2).

Wenn nun die Are CX' die Ellipse erreicht, ift y'
= 0, und x' = CP = a';

alfo 
$$a^2 \sin^2 9 + b^2 \cos^2 9 = \frac{a^2 b^2}{a^{/2}}$$

Eben so, wenn die Are CY' die Elipse erreicht, ift x' = o, und y' = CD = b';

baher 
$$a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi = \frac{a^2b^2}{b'^2};$$

baber burch Substitution in (2)

$$\frac{a^2b^2}{b'^2}y'^2 + \frac{a^2b^2}{a'^2}x'^2 = a^2b^2,$$

ober burch Division jebes Gliebes burch a3b2,

$$\frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'^2}{a'^2} = 1,$$

ober  $a^{2}y^{2} + b^{2}x^{2} = a^{2}b^{2}$ , welches beides die gesuchte Gleichung ist.

S. 133. Zusat 1. Hieraus erhalt man, wenn man bie Accente ber Coordinaten wegläßt,

$$y = \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2} =$$

§. 134. Bufat 2. Die Form ber Gleichung ju finden, wegn man die Absciffen von P, dem Scheitel bes Diameters rechnet.

Es sei 
$$PV = x'$$
, so ist  
 $x = CP - PV = a' - x'$ .

Diefer Werth von x in Bufat (1) fubstituirt, giebt

**[6 \*]** 

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{2a'x' - x'^2},$$

ober wenn man ben Accent von x weglaßt,

$$y=\pm \frac{b'}{2}\sqrt{2a'x-x^2},$$

welches bie verlangte Gleichung ift.

neten Diameters.

§. 135. Jusat 3. Die Gleichungen (1), (2) und (3) find von berselben Form, als die Gleichungen in Beziehung auf die Aren, und bruden, in geometrische Sprache übertragen, eine Sigenschaft aus, von welcher die in §. 94. angegebene nur ein besonderer Fall ift.

Denn 
$$a'^2 - x^2 = (a' + x) (a' - x) = PV \cdot VG$$
,  
und  $2a'x - x^2 = (2a' - x) x = PV \cdot VG$ ;  
folglich  $VQ^2 = \frac{PC^2}{CD^2} PV \cdot VG$ ,

ober PV · VG : VQ<sup>2</sup> = PC<sup>2</sup> · CD<sup>2</sup>;
b. h. bas Rechted dus ben Abschnitten irgend eines Diameters, verhält sich zu bem Quabrat ber Ordinate, wie das Quadrat des halben Diameters, zum Quadrate des halben zügeorb-

- §. 136. Aus bem vorstehenden Sate ergiebt sich, bag die Gleichung der Ellipse immer von derselben Form ift, die Aren mogen rechtwinklicht ober schieswinklicht sein; woraus folgt, daß wenn die Ellipse auf irgend zwei zu= geordnete Diameter bezogen wird,
- (1) wenn die Gleichung der großen Are Aa ist y=ax, dann  $y=-\frac{b'^2}{a'^2a}$  x die Gleichung der kleinen Are Bb ist. Und

(2) baß bie Gleichung ber Tangente fein wird  $a^{2}vv' + b^{2}xx' = a^{2}b^{2}$ .

Den Durchschnitt ber Langente mit irgenb zwei zugeordneten Diametern, als Aren betrachtet, ju finden.

Man bente eine Tangente an irgend einem Punkte O, begegne CP in T, und CD in t, ziehe die Ordinate QV, Qv \*).

Da die Gleichung ber Tangente ift  $a^{/2}yy' + b^{/2}xx' = a^{/2}b^{/2}$ und die Tangente trifft CX z. B. in T, so ist y = 0,  $x = \frac{a^{2}}{v^{2}}$  ober  $CT = \frac{CP^{2}}{CV}$ . baher

Begegnet die Tangente CY, 3. B. in t, bann ift = = 0,  $y = \frac{b^{2}}{v^{\prime}}$  ober  $Ct = \frac{CD^{2}}{Cv}$ ; baher

baber find bie gesuchten Durchschnittspunkte gefunden.

Deshalb ift jeber halbe Diameter bie mitt= lere Proportionale zwischen der Abscisse und bem Theile bes Diameters, ber burch bie Zangente abgeschnitten wirb. (Siebe &. 104.)

S. 138. Wenn von verfciebenen Puntten einer, ber Lage nach gegebenen, Linie Tangen= ten=Paare an bie Ellipse gezogen werden, fo werben die Linien, die die zusammengehbrigen Berührungspunkte verbinden, alle burch ben= felben Puntt gebn. (Fig. 45.)

<sup>\*)</sup> Siebe Big. 44.

Es fei C ber Mittelpunkt ber Ellipfe, MN bie ge= gebene Linie.

Ziehe irgend eine Sehne mn parallel zu MN, und halbire sie durch den Diameter CX; von C ziehe CY parallel zu mn oder MN, dann sind CX, CY die conjugirten Diameter (§. 127); und wenn die Ellipse auf diese als Aren bezogen wird, so ist ihre Gleichung

 $a^{/2}y^2 + b^{/2}x^2 = a^{/2}b^{/2} \dots (1).$ 

Bon irgend einem Punkte (x", y") in MN ziehe ein Tangentenpaar an die Ellipse, bann kann wie in (§. 109.), welches nur ein besonderer Fall des Satzes ist, gezeigt werden, daß die Gleichung der Linie, die die Berührungspunkte verbindet, ist

a'2y" y' + b'2x"x' = a'2b'2 .... (2), worin x', y' bie veranberlichen Coordinaten bes Berabrungspunktes finb.

Es fchneibe bie Linie (2) bie Axe ber x, bann ift y' = 0, und

baher  $x' = \frac{a'^2}{v''}$ ;

hiernach ist ber Durchschnittspunkt berselbe, für alle Punkte, beren Abscissen = x'', b. h. für alle Punkte in ber Linie MN, wie zu beweisen war.

§. 139. Der Durchschnittspunkt liegt in bem zu= geordneten Durchmeffer, welcher ber gegebenen Linie pa= rallel ift.

§. 140. Wenn von bem Durchfichnittspunkte zweier Tangenten ein Durchmeffer gezogen wird, so halbirt er bie Linie, welche bie Beruhrungspunkte verbindet.

Denn bie Gleichung einer Orbinate eines Durch= meffere, ber burch (x", y") geht, ift (§. 125.)

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x + \beta \dots$$
 (1),

und bie Gleichung ber Linie, welche bie Berührungsspunkte verbindet, ift

$$\dot{y}' = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x' + \frac{b'^2}{y''} \cdot \cdot \cdot \cdot (2);$$

biernach ift die lettere parallel zu ber erftern, ift baber eine Ordinate, und beshalb halbirt.

§. 141. Wenn burch irgend einen Punkt ins nerhalb ober aufferhalb der Ellipfe zwei, ber Lage nach gegebene, Linien gezogen werden fo, baß sie die Kurve treffen, so wird bas Rechteck aus ben Abschnitten der einen zu dem Rechteck aus den Abschnitten der andern in einem constanten Verhältnisse sein. (Fig. 46.)

Es sei O irgend ein Punkt innerhalb ber Ellipse, ziehe burch benselben zwei Linien Pp, Qq, beren Lage als bekannt angenommen wird so, bas sie ber Ellipse in P, p und Q, q begegnen; so soll nun gezeigt werden, bas

 $OP \cdot Op : OQ \cdot Oq$ 

in einem conftanten Berhaltniffe ftebe.

Durch O ziehe ben Diameter CK, und CY sei sein conjugirter Durchmeffer. Wird nun die Ellipse auf diese Diameter als Uren bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a^{2}y^{2} + b^{2}x^{2} = a^{2}b^{2} \dots (1)$$

Durch P ziehe PM parallel zu CY, und fete OP = r. CO = b:

bann ist 
$$\frac{PM}{PO} = \frac{\sin POM}{\sin PMO} = \frac{\sin r, x^*}{\sin x, y} = p$$
 (anges nommen)

b. h. y = pr; auf gleiche Beise, wenn  $\frac{\sin r, y}{\sin x, y} = q$ ,

<sup>1)</sup> Siehe Anmerfung S. 84.

fo ist x = CO + ON = 1 + qr;
baher burch Substitution bieser Werthe von x und y
in (1),

in (1),  

$$a^{/2}p^{2}r^{2} + b^{2} \left\{ \delta^{2} + 2\delta q r + q^{2}r^{2} \right\} = a^{/2}b^{/2};$$
b. h. \( (a^{/2}p^{2} + b^{/2}q^{2}) r^{2} + 2\delta q b^{/2} r + b^{/2} (\delta^{2} - a^{/2}) = 0;
b. h. \( r^{2} + \frac{2^{\delta}q}{a^{/2}p^{2} + b^{/2}q^{2}} r + \frac{b^{/2}}{a^{/2}p^{2} + b^{/2}q^{2}} = 0,
worin bie Werthe von r find OP, Op;  
baher \( OP \cdot OP = \frac{-b^{/2}(\delta^{2} - a^{/2})}{a^{/2}p^{2} + b^{/2}q^{/2}}. \)

Muf gleiche Beife

wenn 
$$OQ \Rightarrow r', \frac{\sin r', x}{\sin x, y} \Rightarrow p', \text{ und } \frac{\sin r', y}{\sin x, y} = q',$$

$$OQ \cdot Oq = \frac{-b'^2 (r^2 - a'^2)}{a'^2 p'^2 + b'^2 q'^2};$$
baher  $OP \cdot Op : OQ \cdot Oq = a'^2 p'^2 + b'^2 q'^2 : a'^2 p^2 + b'^2 q^2.$ 

welches ein conftantes Berhaltnif ift, wie zu beweifen

### 3weiter Abschnitt.

über bie Eigenschaften conjugirter Diameter.

S. 142. Wenn ein Diameter burch einen gegebenen Punkt (x', y') gezogen ift, bie Coorbinaten bes Punktes zu finden, in welchem ber conjugirte Diameter bie Ellipse trifft. (Fig. 47.)

Es seien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, so ift, ba bie Gleichung fur CD ift

$$y = \frac{y'}{x'} \times \dots (1),$$

bie Gleichung fur CD (§. 130.)

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} \times \dots (2),$$

baher werben bie Coordinaten bes Punktes D, in welchen CD bie Ellipse schneibet, bestimmt werden konnen, wenn man (2) mit folgender Gleichung combinirt,

 $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots (3)$ 

hieraus hat man, wenn man in (3) ben Werth von y aus (2) substituirt

$$\left\{a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{x'^2}{y'^2} + b^2\right\} x^2 = a^2 b^2,$$

ober wenn man mit b2 bivibirt,

 $\begin{array}{ccc} & - & b^2 & f & \\ & & b^2 & f & \\ & &$ 

baher auch  $y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x$ =  $\frac{b}{a} \cdot x'$ ,

fo bag bie Zeichen von x und y verschieden find, wie auch fein muß.

§. 143. Die Summe ber Quabrate irgenb zweier halber conjugirter Diameter ift gleich ber Summe ber Quabrate ber halben Aren. (Fig. 47.) Es seien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Dias meter, bezeichnet beziehungsweise mit a', b', bann ift

$$a'^{2} = CM^{2} + MP^{2} = x'^{2} + y'^{2},$$

$$b'^{2} = CN^{2} + ND^{2} = \frac{a^{2}}{b^{2}}y'^{2} + \frac{b^{2}}{a^{2}}x'^{2}$$

$$baher a'^{2} + b'^{2} = \left(x'^{2} + \frac{a^{2}}{b^{2}}y'^{2}\right) + \left(y'^{2} + \frac{b^{2}}{a^{2}}x'^{2}\right)$$

$$= \frac{b^{2}x'^{2} + a^{2}y'^{2}}{b^{2}} + \frac{a^{2}y'^{2} + b^{2}x'^{2}}{a^{2}}$$

$$= \frac{a^{2}b^{2}}{b^{2}} + \frac{a^{2}b^{2}}{a^{2}}$$

$$= a^{2} + b^{2}.$$

§. 144. Wenn an ben Scheiteln irgenb zweier conjugirter Diameter Langenten gezo= gen werden so, daß sie ein Parallelogram bilben, so ist die Flache aller solcher Parallelo= gramme eine constante Große. (Fig. 48.)

Es seien Pp, Dd, irgend zwei conjugirte Diameter, verlängert man nun die Tangenten an P und p, D und d, bis sie sich treffen, so ist klar (130), daß sie ein Pazrallelogram bilben werden.

Bon P und T ziehe die Senfrechten PF, TQ auf bie verlangerte DC.

Dann ift bie Flache bes ganzen Parallelogrammes gleich ber vierfachen Flache bes Parallelogrammes PD.

= 4 PC · CD · sin PCD.

$$= 4 \text{ CD} \cdot \text{PF} \dots \dots (1);$$

$$\text{aber PF} = \text{TQ} = \text{CT} \cdot \sin \text{TCQ} = \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{\text{ND}}{\text{DC}} (104)$$

$$\text{b. b. PF} \cdot \text{CD} = \frac{a^2}{x'} \cdot \text{ND}$$

$$= \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{b}{a} x' (142)$$

Dies also in (1) substituirt, giebt die Flache bes ganzen Parallelogrammes = 4ab, und ift baber eine conftante Große.

§. 145. Zusut 1. Nach ber Gleichung (2) ift PF · CD = ab; aber CD = bt und PF = PC sin PCD = a' sin v, wenn v = PCD; baher -ab = a'b' win ye.

S. 146. Bufag 2. Hieraus fann ber Werth von PF gefunden werben, benn

 $^{\prime\prime}$ PF =  $\frac{ab}{CD}$ ,

aber  $CD^2 = a^2 + b^2 - a'^2$  (143)

paher  $PF = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 

§. 147. Die Große und Lage zweier glejscher conjugirter Durchmesser zu finden.
Allgemein ift a2 + b2 = a/2 + b/2.
Es fei a' = b/2

Es sei :

 $2a^{2} = a^{2} + b^{2};$ 

also

 $a' = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot \dots \cdot (1)$ 

hieraus ift die Grbfe bergleichen conjugirter Diameter gefunden.

Run foll ihre Lage bestimmt werden.

Denn ab = a'b' sin 2

 $= a^{2} \sin \gamma$ , wenn a' = b';

 $\mathfrak{b.} \ \mathfrak{h.} \qquad \qquad \sin \gamma = \frac{ab}{a'^2}$ 

 $=\frac{2ab}{a}$ ....(2)

welches ihre gegenseitige Reigung ift. Auch kann ihre Reigung zur großen Are gefunden werden, weil, da fie gleich find, sie auch sommetrisch in Bezug auf die große Are liegen, und beshalb gleiche Neigung zu berselben haben; aber im Allgemeinen (§. 128.)

tang PCA · tang DCA = 
$$-\frac{b^2}{a^2}$$
 (Sig. 47.)

ober tang PCA · tang DCa =  $\frac{b^2}{a^2}$  = tang<sup>2</sup> PCA;

b. h. tang PCA = 
$$\pm \frac{b}{a}$$
 .... (3),

woraus folgt, bag bie gleichen conjugirten Diameter ben Linien BA und Ba parallel find.

S. 148. Bon allen Syftemen conjugirter Durchmeffer bilben biejenigen, welche gleich finb, ben größten Bintel. (Fig. 48.)

Denn allgemein ist sin 
$$\gamma = \frac{ab}{a'b'}$$
 (145.)

Daher ift ber Winkel PCd ein Minimum, ober PCD ein Maximum, wenn bas Product a'b' ein Maximum ift; b. h. wenn a' = b' ift, wie zu beweisen war.

§. 49. Busat. hieraus tann bewiesen werden, baß von allen Spftemen conjugirter Diameter bie Summe berer, welche rechtwinklicht sind, am kleinsten, und bie Summe berer, welche gleich sind, am größesten ist.

Denn 
$$a' + b' = V (a'^2 + b'^2 + 2a'b')$$
  
=  $V \left(a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin y}\right)$ : deshalb

- (1) ist a' + b' ein Maximum, wenn sin , ein Mis nimum ist, d. h. wenn a' = b': und
- (2) a' + b' ist ein Minimum, wenn sin  $\gamma$  ein Masrimum ist, b. h., wenn  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , ober die conjugirten Diameter rechtwinklicht sind.
- §. 150. Das Rechted aus ben Focal=Ab= ftanben irgend eines Punktes ift gleich bem Quadrate bes correspondirenben halben conjus girten Diameters. (Fig. 49.)

Es sei P irgend ein Punkt (x, y), CD ber halbe conjugirte Diameter zu CP; verbinde PS und PH; zu beweisen also, daß

$$SP \cdot HP = CD^2$$
.

All gemein iff 
$$CD^2 = a^2 + b^2 - CP^2$$
 (143),  

$$= a^2 + b^2 - (x^2 + y^2),$$

$$= a^2 + b^2 - x^2 - (1 - e^2)$$

$$(a^2 - x^2)$$

$$= a^2 + b^2 - x^2 - a^2 + x^2$$

$$+ e^2 a^2 - e^2 x^2$$

$$= a^2 + a^2 e^2 - e^2 x^2$$

$$= a^2 - e^2 x^2 - e^2 x^2$$

$$= a^2 - e^2 x^2 - e^2 x^2$$
(§. 91.)

Abor 
$$a^2 - e^2 x^2 = (a - ex) (a + ex)$$

$$= SP \cdot HP. (§. 112.)$$
Daher 
$$SP \cdot HP = CD^2.$$

§. 151. Es feien CP, CD irgend zwei halbe conjugirte Diameter, und eine Tangente an P treffe die Uren ber Ellipfe in T und t, zu beweisen, daß PT · Pt = CD<sup>2</sup>. (Fig. 50.)

Wenn CP und CD als die Coordinaten Aren angenommen werben, bann find die Gleichungen für CA, CB (§. 136.) beziehungsweise

$$y = ax$$

$$y = -\frac{b^{2}}{a^{2}a} x$$

Es sei x = a', ober CP, bann wird in ben ersten y ober PT = aa'; und

y ober  $Pt = -\frac{b'^2}{a'a}$  in der zweiten,

baher  $PT \cdot PT = -b^{2} = CD^{2}$ .

Das Produkt PT . Pt ift negativ, weil PT und Pt an entgegengesetzen Seiten ber Ure liegend verschies bene Zeichen haben.

S. 152. Bufat. Genau auf biefelbe Beife tann bewiefen werden, daß wenn bie Tangente an P irgend zwei conjugirte Diameter in T unb t trifft, ift

$$PT \cdot Pt = CD^2$$
.

§. 153. Wenn eine Tangente an irgend einem Puntte P, die Tangenten an ben Scheiteln ber großen Ure in T und t trifft, zu beweisen, daß (Fig. 51.)

$$AT \cdot at = BC^2$$
.

Die Gleichung ber Tangente an P (x', y') ift a2yy' + b2xx' = a2b2

Es sei x = a = CAbann'ist  $a^2yy' = b^2a (a - x');$ b. h. y ober  $AT = \frac{b^2}{ay'} (a - x');$ Auf gleiche Weise, wenn x = -a = Ca, so ist

y ober at 
$$=\frac{b^2}{ay'}$$
 (a + x');  
baher  $AT \cdot at = \frac{b^4}{a^2y'^2}$  (a<sup>2</sup> - x'<sup>2</sup>)....(1).  
Wher  $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}$  (a<sup>2</sup> - x'<sup>2</sup>),  
ober  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - x'^2}{y'^2}$ ;  
baher burch Substitution in (1),  
 $AT \cdot At = b^2 = BC^2$ .

§. 154. Genau auf biefelbe Beise kann bewiesen werben, bag wenn P'p', D'd' zwei was immer für conzingirte Diameter find, und bie Tangente an P trifft bie an ben Scheiteln ber erfteren gezogenen Tangenten in T und t, immer ift

P'T, p't =  $CD^2$ .

### Dritter Ubichnitt.

#### Bon Supplementar-Sehnen.

Erklarung. Wenn von ben Scheiteln irgend eines Diameters zwei gerade Linien nach irgend einem Punkte in ber Ellipse gezogen werden, so heißen sie Supplemenstar=Sehnen.

Die Sehnen von den Schriteln der großen Ure gezogen heißen haupt=Supplementar=Sehnen. §. 155. Wenn irgend zwei Supplementars Sehnen gezogen find, und bie Gleichung ber einen gegeben ift, bie Gleichung ber anbern zu finden. (Fig. 52.)

Wird die Ellipse auf irgend zwei conjugirte Diamester bezogen, so ift ihre Gleichung

$$a^{2}y^{2} + b^{2}x^{2} = a^{2}b^{2}....(1).$$

Durch irgend einen Punkt P (x', y') ziehe ben Dias meter Pp, und PQ, Qp seien irgend ein Paar Supples mentar=Sehnen; ba nun die Gleichung für PQ ist

$$y - y' = a (x-x') \dots (2),$$

fo ift nun erforderlich, die Gleichung fur pQ ju finden.

Da die Coordinaten von P, x', y' find, so find die für p, — x', — y', daher wird die Gleichung für pQ (§. 14.) von dieser Form sein:

$$y + y' = z' (z + z') \dots (3),$$

worin a' zu finden ift.

Da die Linien, beren Gleichungen (2) und (3) find, sich in Q schneiben, so sind die Coordinaten für diesen Punkt in beiden Gleichungen dieselben; multiplicitt man sie also in einander, so hat man

$$y^{2} - y^{\prime 2} = x x^{\prime} (x^{2} - x^{\prime 2});$$
b. h. 
$$x x^{\prime} = \frac{y^{2} - y^{\prime 2}}{x^{2} - x^{\prime 2}} \dots (4)$$

ba aber x' und y' bie Coordinaten von P, einem Punkte in ber Ellipse find, so muffen fie ber Gleichung (1) genugen;

baber 
$$a^{/2}y^{/2} + b^{/2}x^{/2} = a^{/2}b^{/2}$$
.

Dies von (1) abgezogen, erhalt man  $a'^2 (y^2 - y'^2) + b'^2 (x^2 - x'^2) = 0;$ 

b. b. 
$$\frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

daher

daher burch Substitution in (4)

$$aa' = -\frac{b'^2}{a'^2}$$
; b. h.  $a' = -\frac{b'^2}{a'^2a}$ ,

und die Gleichung fur pQ wird burch Substitution

$$y + y' = -\frac{b'^2}{a'^2 a} (x + x').$$

§. 156. Bufat. Es falle Pp mit ber großen Are Aa jusammen, so wird die Gleichung fur al gegogen butch ben Punkt (- a, o) sein

$$y = \alpha (x + a),$$

und beshalb die Gleichung AQ gezogen burch ben Punkt A (+ a, o)

$$y = -\frac{b^{2}}{a^{2}a} (x - a).$$

§. 157. Benn zwei Diameter zu irgenb zwei Supplementar=Sehnen parallel gezogen werben, fo find fie conjugirte Diameter.

Da bie Gleichungen ber beiben Supplementar = Seh= nen find

$$y-y'=a(x-x')\cdot\cdot\cdot\cdot(1)$$

$$y - y' = \alpha (x - x') \dots (1),$$

$$y + y' = -\frac{b'^2}{a'^2 \alpha} (x + x') \dots (2),$$

fo ziehe einen Diameter parallel zu (1), so ist seine Gleichung

$$y = \alpha x$$
;

beshalb, ba bie Gleichung fur ben conjugirten Diameter (§. 129.) ift

$$y = -\frac{b^{t^2}}{a^{t^2}} x$$

fo folgt, bag biefer lettere parallel zu (2) ift, wie zu beweisen mar.

§. 158. Bufat 1. hiernach fann ein Diameter gezogen werben, welcher einem gegebenen Diameter conjugirt ift. (Fig. 53.)

Es fei Pp ber gegebene Diameter, und

(1) bie große Ure ber Ellipfe fei gegeben.

Bon a ziehe aR parallel zu Pp, und verbinde R, A; wird bann Dd burch C parallel zu RA gezogen, so ist dies ber conjugirte Diameter zu Pp.

(2) Die große Ure fei unbekannt.

Biebe einen beliebigen Diameter Rr; burch r ziebe rQ parallel zu Pp, verbinde Q, R; wird bann Dd burch C parallel zu RQ gezogen, so ist bies ber conjugirte Diameter zu Pp.

Diese Schluffe find an sich klar.

§. 159. Zusat 2. hieraus auch fann eine fehr einfache Methobe abgeleitet werben, an einen in ber Ellipse gegebenen Punkt eine Langente zu ziehn.

Es sei P ber gegebene Punkt, und

(1) bie große Ure fei gegeben.

Ziehe PC und die Sehne aQ bamit parallel, verbinde Q, A; wird bann PT zu QA parallel gezogen, so berührt es die Ellipse in P.

(2) Die große Are sei unbefannt.

Biebe einen beliebigen Diameter RCr, verbinde P, C; ziche r Q parallel zu PC, und verbinde QR; wird bann PT parallel zu QR gezogen, so wird dies eine Langente in P sein.

§. 160. Den Binkel, welchen die Haupt= Supplementar = Sehnen bilben, zu finden. (Fig. 54.)

Es fei ber Puntt Q (x', y') ber Durchschnitt er belben Sehnen AQ, aQ, and nimm an, bie Ellipfe fe. auf ihre Uren bezogen.

Die Gleichungen fur Qa, QA find nun (§. 156.)  $y = \omega (x + a)$ 

$$y = a'(x - a)$$

tang AQa = 
$$\frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha \alpha'}$$
 (21)

$$=\frac{\frac{\lambda-a}{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdots(1)}{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdots$$

$$bad\ell = -\frac{b^2}{a^2n}.$$

Mun ift  $a' = \tan QAX = -\tan QAa = -\frac{y'}{a-x'}$ 

 $a = tang \ QaX$  . . . .  $= \frac{y'}{a+x'}$ 

baher 
$$a' - a = -y' \left( \frac{1}{a - x'} + \frac{1}{a - x'} \right)$$
  
=  $-\frac{y'}{a^2 - x'^2} \cdot 2a$ ,

 $= -\frac{2ab^2}{a^2v'};$ 

baber burch Substitution in (1)

tang AQa = 
$$-\frac{2ab^2}{y'(a^2-b^2)}$$

S. 161. Bufat 1. Da bas Zeichen biefer Große negativ ift, fo ift ber Bintel immer ftumpf; beshalb alfo auch ber Bintel ben conjugirte Diameter bilden, ftumpf ift. 1741

§. 162. Zusat 2. Der Winkel AQa ift ber mbg= lichst gebste, wenn y' so ift, b. h. wenn y' == b, ober wenn der Punkt Q mit B bem Scheitel ber kleinen Axe zusammen fällt. In diesem Punkte sind die Hauptsupsplementar=Sehnen gleich und ihre Neigung zu ber gebstern Axe ist

 $= \tan \left(\frac{b}{a}\right)^*$ 

§. 163. Jusat 3. Hieraus folgt, bag bie confugirten Diameter, bie biefen Sehnen parallel find, ebenfalls gleich sind, und ben mbglichst größten Winkel bilben. (Siehe §. 147.)

§. 164. Zwei conjugirte Diameter zu ziehn, bie einen gegebenen Winkel mit einander bilben.

Indem die Ellipse auf ihre Uren bezogen wird, besteichne 2a', 2b' die gesuchten conjugirten Diameter, und bas Supplement des Winkels, unter welchem sie gegen einunder geneigt sind.

Do nun (§§. 143. und 145.)  

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \dots (1)$$
  
und  $a'b' = \frac{ab}{ab} \dots (2)$ 

fo hat man, indem man die zweite zweimal zu ben erften abbirt

$$a^{2} + b^{2} + 2a^{2}b^{2} = a^{2} + b^{2} + \frac{2ab}{\sin x}$$

<sup>1)</sup> Unter Diesem Ausbrucke ift zu verfiehen ber Wintel, beffen Tangente b ift.

baher wenn bie Wurzel ausgezogen wird

$$a' + b' = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin x}}{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin x}}}$$

Auf gleiche Beife

$$a'-b'=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2-\frac{\lambda ab}{s_0}}{s_0}}$$

baher burch Abbition, und dann durch Subtraction,

$$a' = \pm \frac{\pi}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{\sin \gamma}}$$
 $\pm \frac{\pi}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin \gamma}}$ 

$$b' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^3 + \frac{2ab}{\sin \gamma}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sin \gamma}}$$

wodurch die Große ber gesuchten Diamet, bestimmt ist. Nun, da PCA = DCA - DCP (Fig. 47.),

tang PCA = 
$$\frac{\text{tang DCA} - \text{tang DCP}}{1 + \text{tang DCA} \cdot \text{tang DCP}}$$
,

ober indem man bie bereits gebrauchte Bezeichnung beis behalt

$$\alpha = \frac{\alpha' + \tan \alpha}{1 - \alpha' \tan \alpha};$$

aber 
$$aa' = -\frac{b^2}{a^2}$$
; b. b.  $a' = -\frac{b^2}{a^2a}$ ;

und durch Substitution

$$u = \frac{-\frac{b^2}{a^2 w} + \tan y}{1 + \frac{b^2}{a^2 w} \tan y};$$

b. b. 
$$a^2 - \frac{b^2}{a^2} \tan y \cdot a = -\frac{b^2}{a^2} - a \tan y$$
,

ober  $a^3 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \tan y \cdot a = -\frac{b^2}{a^3}$ ;

b. b.  $a = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} \tan y + \frac{1}{2a^2}$ 
 $\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \tan y^2 - 4a^2b^2}$ ,

beshalb ift also auch bie Lage bes Diameters bestimmt.

Die Aufgabe murbe unmbglich fein, wenn

$$\tan g^2 \gamma < \frac{4a^2b_s^2}{(a^2 - b^2)^2}$$

obs  $\tan g \gamma < \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ 

Da aber v ein spiger Winkel ift, so wird er ein Minimum fein, wenn bie Diameter gleich find (147), und in biefem Salle

$$ang \ \gamma = \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

baher nun, ba fing  $\nu$  niemals kleiner als  $\frac{2ab}{a^2-b^2}$  fein kann, so ist die Aufgabe immer mbglich.

Diefelbe Nifgabe gestattet folgende geometrische Auflbfung. (Fig. 55.)

'Ziehe einen beliebilen Diameter Rr, und über ihm beschreibe einen Kreisabschnitt, welcher einen, bem gegebenen gleichen Winkel faßt, und die Ellipse in Q schneibet. Biehe QR, Qr; und dief'n parallel ziehe die Diameter Pp, Dd; dies sind die gefichten Diameter.

Denn indem sie parallel zu ben Supplementar=Gehs nen QR, Qr find, sind sie conjugirte Diameter (157.) und der Winkel

#### PCD = ROr,

und baher gleich bem Gegebenen.

Die Aufgabe läßt eine zweite Auflbsung zu, (Fig. 56.): benn ber Kreis wird die Ellipse noch einmal schneiden in irgend einem Punkte Q'; ziehe daher die Supplementarschnen Q'R, Q'r; wird bann P'p und D'd durch ben Mittelpunkt parallel zu Q'R, Q'r gezogen, so sind dies die gesuchten Diameter.

Denn sie sind offenbar conjugirte Diameter und  $P'CD' = \pi - RQ'r$ , baher bem gegebenen Winkel gleich.

### Biertes Rapitel.

#### Bermifchte Sape.

S. 165. Benn eine Ellipse auf einer Chene gezeichnet ift, ihren Mittelpunkt und die Are zu finden.

(1) Den Mittelpunkt zu finden. (Fig. 57.) Ziehe zwei beliedige parallele Sehnen MN, PQ und halbire sie in den Punkten m, p; verbinde m, p und verlängere diese Linie, bis sie die Ellipse in R, r trifft; ba nun mp durch die Mittelpunkte zweier paralleler Sehnen geht, so ist es ein Diameter (124.), und daher C, der Mittelpunkt von Rr, ist der gesuchte Mittelpunkt.

(2) Die Are ju finben. (Fig. 58.)

Nimm einen Punkt P in ber Ellipse, und von bem Punkte C, ber eben gefunden ift, als Mittelpunkt, besichreibe mit CP einen Kreis, ber bie Ellipse in p ichneibe,

ziehe Pp, halbire es und in bem halbirungspunkte errichte die Senkrechte ACa, die die Ellipse in A und a
trifft; bann ift ACa die große Are: die kleinere wird erhalten, wenn man BCb rechtwinklicht zu Aa zieht.

§. 166. Den Ort bes Endpunktes einer geraben Linie zu finden, welche fich auf zweien, zu einander rechtwinklichten Linien so bewegt, daß der Theil dieser Linie, welcher zwischen ben beiben Senkrechten liegt, immer von berfelben gegebenen Lange bleibt. (Fig. 59.)

AX, AY seien die gegebenen Linien, QRP irgend eine Lage ber Linie, von berem Endpunkte man den Ort sucht.

Nimm AX, AY als Coordinaten Aren, ziehe die Senkrechte PM auf AX, und verlangere fie, bis fie in N die Parallele zu AX, welche aus Q gezogen ist, trifft.

Es sei AM = x, MP = y, QP = a, PR = b. Dann ist  $QP^2 = QN^2 + NP^2 \dots$  (1); aber QN = AM = x,

$$NP = \frac{QP}{RO} \cdot MP = \frac{a}{b} y.$$

Daher burch Substitution in (1)

$$a^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2$$

ober  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ , welches die Gleichung ber Ellipse ift.

Daber ift ber Ort von P eine Ellipse, beren Mitztelpunkt A, und beren Aren 2a und 2b find.

§. 167. Jusat 1. Auf eine, ber vorstehenben, genau ahnliche Weise kann bewiesen werden, daß wenn bie Linien AX und AY unter einander geneigt sind, un=

ter bem Winkel &, die Gleichung bes Ortes von P fein wird

a2y2 + b2x2 + 2ab cos 9 · xy - a2b2 = 0, welche eine Elipse, bezogen auf beliebige Diameter, vor-ftellt \*).

§. 168. Zusat 2. Hieraus tann eine leichte prattische Methode abgeleitet werden, eine Ellipse zu beschreiben burch Hulfe eines Instrumentes, welches Elslipsograph (Ellipsen=Birkel) heißt. (Fig. 60.)

Es sei QP gleich ber halben großen Are, und NP gleich ber halben kleinen Are; bewege nun die Linie QNP berum, so daß die Punkte QN fortwährend auf der Coordinaten Aren bleiben, so wird der Punkt P eine Ellipse beschreiben, wie klar ist aus der vorstehenden Untersuschung.

§. 169. In ber großen Are Aaeiner Ellipfe einen Puntt O zu finden fo, bag, wenn eine beliebige Sehne POp burch benfelben gezogen wird, ber Bintel PAp ein rechter fei. (Fig. 31.)

Wie bei ber Parabel (§. 87.) konnen bie Coordinaten von P und p bestimmt werben, wenn man y aus biesen beiben Gleichungen

$$y=\mu x, \quad y=-\frac{1}{4}x,$$

und ber Gleichung ber Ellipfe

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

<sup>\*)</sup> Hamilton's analytische Geometrie (§§. 89. und 91.)

eliminirt. Man erhalt alsbann, wenn man bieselbe Bezeichnung anwendet, wie in dem angezogenen Paragraphen,

$$x' = \frac{2b^2a}{a^2\alpha^2 + b^2}, \quad y' = \frac{2b^2a\alpha}{a^2\alpha^2 + b^2},$$

$$x'' = \frac{2b^2a\alpha^2}{a^2 + b^2\alpha^2}, \quad y'' = -\frac{2b^2a\alpha}{a^2 + b^2\alpha^2};$$

bezeichnet man nun 2b2a mit C, und die Nenner ber ersten und zweiten Reihe beziehungsweise mit m und n, so hat man fur Pp folgende Gleichung:

$$y - \frac{c_s}{m} = \frac{-\frac{c_s}{n} - \frac{c_s}{m}}{\frac{c_{s^2}}{n} - \frac{c}{m}} \left(x - \frac{c}{m}\right)$$
$$= -s \cdot \frac{m + n}{s^2 m - m} \left(x - \frac{c}{m}\right).$$

Es schneide Pp die Are z. B. in O, dann ift y = 0, und

$$x - \frac{c}{m} = \frac{c}{m} \cdot \frac{a^2 m - n}{m + n};$$
baher 
$$x = c \frac{a^2 + 1}{m + n}.$$
Wher  $m + n = a^2 a^2 + b^2 + a^2 + b^2 a^2 = (a^2 + b^2) (a^2 + 1);$ 
baher x ober  $AO = \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{2b^2 a}{a^2 + b^2}.$ 

§. 170. Tangenten Paare an eine Ellipse gezogen, follen sich beständig unter rechten Binteln ichneiben; ben Ort ber Durchschnittepuntte zu finden. Benn bie gerabe Linie

$$y = \alpha x + \beta \dots (2)$$

fo gezogen wirb, baß fie bie Ellipfe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots (1)$$

schneibet, so erhalt man die Ordinaten ber beiben Durch= schnittspunkte aus der Gleichung

$$(a^2 a^2 + b^2)y^2 - 2b^2 \beta y + b^2 (\beta^2 - a^2 a^2)$$
. (§. 101.)

Man nehme nun an, die Sekante gehe über in die Tangente, so find die beiden Wurzeln dieser Gleichung gleich, und die Gleichung, die nun ein vollkomenes Quastrat ift, giebt,

$$4(a^{2}s^{2} + b^{2}) b^{2}(\beta^{2} - a^{2}s^{2}) = 4b^{4}\beta^{2}, (\S. 88.)$$
ober  $(a^{2}s^{2} + b^{2}) (\beta^{2} - a^{2}s^{2}) = b^{2}\beta^{2};$ 
b.  $\beta. a^{2}s^{2}\beta^{2} - a^{4}s^{4} - b^{2}a^{2}s^{2} = o;$ 
b.  $\beta. a^{2}s^{2} + b^{2} = \beta^{2} = (y - \kappa x)^{2}$  and (1)
$$= y^{2} - 2xys + s^{2}x^{2};$$
of  $(a^{2} - x^{2}) s^{2} + 2xy \cdot s + b^{2} - y^{2} = o;$ 
ober
$$s^{2} + \frac{2xy}{a^{2} - x^{2}} s + \frac{b^{2} - y^{2}}{a^{2} - x^{2}} = o.$$

Man nehme an, a, e, feien die Burzeln dieser Gleichung, so bezeichnen sie die trigonometrischen Tanzgenten des Winkels, welchen die Tangenten der Elipse mit der Axe der x bilben, und nach der Theorie der Gleichungen ist

$$a'a'' = \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2};$$

aber nach ber Unnahme schneiden sich bie Tangenten unster rechten Winkeln

baher

ļ.

$$a'a'' = -1$$

hieraus 
$$\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1,$$
b. h. 
$$b^2 - y^2 = -a^2 + x^2;$$
oder 
$$y^2 + x^2 = a^2 + b^2,$$
welches die Gleichung eines Kreises ist.

hiernach ift ber gesuchte Ort ein Rreis, beffen Ras

$$= V_{\overline{a^2 + b^2}}.$$

§. 171. Bufat. Auf bieselbe Beise tann man ben Ort bes Durchschnittes von Tangenten=Paaren finben, bie parallel find zu conjugirten Diametern; mit anbern Borten, ben Ort ber Scheitel aller ber gleichen Parallelogramme, bie um bie Ellipse beschrieben sind \*).

Denn in biesem Falle 
$$aa' = -\frac{b^2}{a^2}$$
;  
b. h.  $\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -\frac{b^2}{a^2}$ ;  
b. h.  $a^2b^2 - a^2y^2 = -b^2a^2 + b^2x^2$ ;  
b. h.  $a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2$ ,  
welches die Gleichung einer Ellipse ist.

Hiernach ift ber gesuchte Ort eine Ellipse, beren Mittelpunkt mit bem ber ursprunglichen zusammen fallt, und beren Uren man so finden kann;

<sup>\*)</sup> Bon allen Parallelogrammen, die um eine Ellipse besichrieben find, sind nur die von gleicher Flache, die ihre Seiten parallel zu einem Spfteme conjugirter Durchmeffer baben.

Es sei x = 0; dann  $a^2y^2 = 2a^2b^2$ d. h.  $y = b\sqrt{2} = ber halben kleinen$ Are; und auf gleiche Weise  $x = a\sqrt{2} = ber halben großen$ Are.

# Bon ber Spperbel.

# Erftes Rapitel.

Von der Spperdel, auf ihre Azen bezogen,

§. 172. Die Gleichung ber Spperbel gu finben. (Fig. 61.)

Die Syperbel ift ber Ort eines Punktes, beffen Abftand vom Focus beständig in einem gegebenen Berhaltniffe größer ift, als beffen Entfernung von ber Directrix.

Es sei S ber Focus, Kk bie Directrix, P irgend ein Punkt in der Hyperbel, durch S ziehe die unbegranzte Linie ESX senkrecht auf Kk, von P ziehe die Senkrecht ten PM, PQ auf AX und Kk, und verbinde PS.

Es sei das gegebene Verhaltniß PS:PQ = e:1, so daß e>1 ist; wird dann SE in A so getheilt, daß SA:AE = e:1, so wird A ein Punkt in der Hyperbel sein.

Von A ziehe AY rechtwinklicht zu AX, und nimm AX und AY als die Coordinaten Uren.

Es sci AM = x, MP = y, AS = m;  
bann ist SP<sup>2</sup> = PM<sup>2</sup> + MS<sup>2</sup> = y<sup>2</sup> + (x - m)<sup>2</sup>  
.... (1)  
aber SP<sup>2</sup> = e<sup>2</sup> · PQ<sup>2</sup> = e<sup>2</sup> (AE + AM)<sup>2</sup>  
= e<sup>2</sup> 
$$\left(\frac{m}{e} + x\right)^2$$
 .... (2)

baber (1) und (2) gleich gefet,

$$y^{2} + (x - m)^{2} = m^{2} + 2mex + e^{2}x^{2};$$
b. b. 
$$y^{2} = 2m(1 + e)x + (e^{2} - 1)x^{2}$$

$$= (e^{2} - 1)(\frac{2m}{e - 1}x + x^{2})$$

ober wenn  $\frac{m}{e-1} = a$  angenommen wird  $y^2 = (e^2 - 1) (2ax + x^2)$ , welches die gesuchte Gleichung ist.

Wenn daher BCb rechtwinklicht auf Aa im Punkte C gezogen wird und sowohl CB, als auch Cb = a  $\sqrt{e^2-1}$  genommen wird, so sind die Punkte B. b nicht Punkte in der Hyperbel.

§. 174. 
$$3u \text{ fat 2.}$$
 Bezeichne BC burch b, so ist  $b = \pm a \sqrt{e^2 - 1}$ ;  $\sqrt{e^2 - 1} = \pm \frac{b}{a}$ ;

beshalb wird burch Substitution die obige Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{2ax + x^2}.$$

Erklarung. Die geraden Linien Aa, Bb, bezeichs net mit 2a und 2b, beziehungsweise, heißen die Quer-Are, und die conjugirte Are; die Punkte A, a, in welchen die erstere die Hyperbel trifft, heißen die Scheistel; und der Punkt C, in welchem sich die Aren schneis den, heißt der Mittelpunkt.

§. 185. Die Gleichung ber Spperbel zu finden, wenn die Coordinaten vom Mittel= puntte genommen werben. (Fig. 61.)

Es fei P irgend ein Punkt in ber Spperbel, ziehe . bie Senkrechte PM auf Aa, und CM = x'.

Mun ift die Gleichung ber Spperbel, wenn die Coorbinaten in A anfangen,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2) \dots (1).$$

Aber

$$\begin{array}{lll}
x & = AM = CM - CA \\
& = x' - a.
\end{array}$$

Substituirt man biefen Werth von x, fo hat man

$$y^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} \left\{ 2a (x' - a) + (x' - a)^{2} \right\}$$
$$= \frac{b^{2}}{a^{2}} (x'^{2} - a^{2}) \dots (2),$$

welches bie verlangte Gleichung ift.

§. 176. Zusat 1. Läßt man ben Accent weg, ber nur angewandt wurde, um die neue von der alten Albe

Absciffe zu unterscheiben, so hat man burch Multiplication und Versetzung

 $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \dots$  (3), und dividirt man jedes Glied burch  $a^2b^2$ , so hat man  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1 \dots$  (4).

Won den brei letten Formen der Gleichung fur bie Sopperbel ift die mit (3) bezeichnete die gebrauchlichste.

§. 177. Bufat 2. Diese Gleichungen in geometrische Sprache übertragen, bruden eine Eigenschaft ber Hyperbel aus.

Denn wenn (Fig. 61.) P irgend ein Puntt ift, fo hat man

 $2ax + x^2 = x (2a + x) = MA \cdot Ma,$ und  $x'^2 - a^2 = (x' - a) (x' + a) = MA \cdot Ma;$ baher  $MP^2 = \frac{BC^2}{CA^2} \cdot AM \cdot Ma,$ 

ober AM · Ma : MP² = AC² : BC², b. h. bas Rechteck aus ben Abschnitten ber Quer=Axe verhalt sich zu bem Quabrat ber Or= binate, wie bas Quabrat ber halben Quer=Axe zum Quabrate ber halben conjugirten Axe.

§. 178. Bufat 3. Es fei a = b, bann werben Gleichung (1) und (2)

$$y^2 = 2ax + x^2$$
  
 $y^2 = x^2 - a^2$ 

Die burch biese Gleichungen bargestellte Spperbel beißt die Gleich feitige, ober Rechtwinklichte, und ift in Beziehung auf die gemeine Hyperbel bas, was ber Rreis gegen bie Elipse ist.

§. 179. Bufat 4. Bergleicht man bie Gleichung ber Syperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

mit ber ber Ellipfe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

so ist klar, bas um von der einen Kurve zu ber andern überzugehn, man nur 4 b2 in — b2, oder b in bV — 1 zu verwandeln braucht.

§. 180. Aus ber Gleichung ber Spperbel ihre Geftalt zu bestimmen.

Nimmt man die Gleichung

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

so hat man entweber

$$y = \pm \frac{b}{a} V_{\overline{x^2 - a^2} \dots (1)}$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt[3]{y^2 + b^2} \dots (2).$$

(1) In Gleichung (1) fetze x = 0,

bann ift y = ± b V - 1 = CB ober Cb (Fig. 61.)

Setze y = 0, bann ift  $x = \pm a = CA$  oder Ca.

Setze x < ± a

bann werden bie Werthe von y imaginair; beshalb liegt kein Punkt ber Spperbel zwischen A und a.

Setze x = ± a

bann  $y = \pm 0$ ,

b. h. die Syperbel schneibet die Are XX' in ben Punt-ten A, a.

Setze  $x > \pm a$ ,

bann giebt es fur jeben Werth von x, zwei gleiche Werthe fur y, mit entgegengefetten Zeichen.

Wenn x wachft, wachfen die Werthe von y; und wenn x unendlich groß wird, werden die Werthe von y eben fo.

Die Hyperbel also besteht aus zwei eutgegengeseten Armen, die sich unbegranzt an den Rechten von A und an der Linken von a erstrecken, und in Bezug auf die Are XAX' eine symmetrische Lage haben.

- (2) Die Dischffion der Gleichung (2) murbe ju bems felben Resultate fuhren.
- S. 181. Bufat 1. Die Entfernung bes, Mittelpunktes vom Focus ift, (Fig. 61.)

$$= CS = CA + AS$$
$$= a + a (e-1) = ae$$

Diese Große heißt bie Eccentricitat ber Syperbel.

§. 182. Bufat 2. Den Werth ber Drbinate, bie burch ben Focus geht, ju finden.

Wenn die Ordinate burch ben Focus geht, ift

x = ae;baher  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 e^2)$ 

$$y^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} (a^{2}e^{2} - a^{2})$$

$$= b^{2} (e^{2} - 1)$$

$$= \frac{b^{4}}{a^{2}};$$

baher

$$y = \pm \frac{b^2}{a^2} = SL$$
 ober Sl (Fig. 61.)

Die Doppelordinate Ll, die burch ben Focus geht, heißt ber hanptparameter, ober latus rectum.

§. 183. Bufat 3. Fig. 62. In ber Gleichung a²y² — b²x² = — a²b²

verwandle x in y, und y in x; mit andern Worten: nimm die Absciffen nun auf CY, und die Orbinaten auf CX; (§. 99.) man hat dann

 $a^2x^2 - b^2y^2 = -a^2b^2$ ,

welches diefelbe Spperbel, wie vorher barftellt, aber vertwieden ber Lage nach.

Es sei x = o; so ift y = ± a.

y = 0; giebt  $x = \pm b \sqrt{-1}$ , beshalb ist nun Bb die Quer=Ure, und die conjugirte

Diese Hyperbel heißt, in Beziehung auf bie erfte, bie conjugirte Spperbel.

§. 184. Wenn bie Quet-Are als unenblich groß angenommen wirb, geht bie Hyperbel in die Parabel über.

Die Gleichung ber Spperbel ift

$$y^{2} = \frac{b^{2}}{a^{2}} (2ax + x^{2})$$

$$= \frac{2b^{2}}{a} x + \frac{b^{2}}{a^{2}} x^{2} \dots (1)$$

Mun iff  $b^2 = e^2 a^2 - a^2 \dots$  (§. 174.) = (ea + a) (ea - a),

= (ea + a) AS;

baher  $\frac{b^2}{a} = (e + 1) AS;$ 

baber burch Substitution in (1)

$$y^2 = 2AS (e + 1) x + \frac{b^2}{a^2} \dot{x}^2 \dots (2)$$

Man nehme nun a unendlich groß, bann ift  $\frac{b^2}{a^2} = o$ ,

und ba  $a = \frac{m}{e-1}$ , so hat man e-1 = o, ober e = 1; beshalb burch Substitution in (2)

$$y^2 = 4AS \cdot x$$

welches die Gleichung ber Parabel ift, woraus bie Bahrsheit bes Sages folgt. (§. 100.)

§. 185. Den Durchichnitt einer geraben Linie mit ber Spperbel zu finden.

Es fei bie Gleichung ber gegebenen Linie....

$$y = \alpha x + \beta \dots \dots (1)$$

Allsbann wird man die Coordinaten des Durchschnitts= punttes ober ber Durchschnittspuntte erhalten, wenn man diese Gleichung mit ber ber Spperbel combinitt,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \dots (2).$$

Substituirt man nun in (2) ben Werth von x aus (1), so bat man

$$a^2y^2 - ((y - \beta)^2 = -a^2b^2;$$

b. h. 
$$(a^2a^2 - b^2) y_*^2 + 2b^2\beta y - b^2\beta^2 = -a^2b^2a^2;$$

b. h. 
$$y^2 + \frac{2b^2\beta}{a^2a^2-b^2}y + \frac{b^2(a^2a^2-\beta^2)}{a^2a^2-b^2} = 0$$
.

Ans diefer quadratischen Gleichung erhalt man zwei Werthe fur y, welche substituirt in (1) zwei corresponsitiende Werthe fur x geben, daher konnen die gesuchten Coordinaten bestimmt werden.

Wenn die zwei Wurzeln biefer quadratischen Gleischung gleich find, so fallen die Durchschnittspunkte zusammen, und die gerade Linie berührt die Hopperbet; sind sie imaginair, so liegt die gerade Linie ganz außemalb ber Hopperbel.

hieraus ergiebt fich, baß eine gerabe Linie die hyperbel in nicht mehr als zwei Puntten fchneiben fann.

Erklarung. Der Theil ber geraben Linie, ber innorhalb ber Hyperbel liegt, heißt Sehue; geht fie burch ben Focus, so heißt fie Focal-Sehne, §. 486. Die Gleichung einer geraben Linie ju finden, welche die Soperbel in einem gegebenen Puntte berührt.

Es fcien x', y' die Coordinaten bes gegebenen Punttes, und x", y" die irgend eines andern Punttes, nahe bem erstern.

Dann ift bie Gleichung ber burch biefe Punkte ge-

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')....(1).$$

Da -aber auch beibe Puntte in ber Spperbel liegen, fo bat man

$$a^{2}y'^{2} - b^{2}x'^{2} = -a^{2}b^{2},$$
  
 $a^{2}y''^{2} - b^{2}x''^{2} = -a^{2}b^{2};$ 

baber burch Subtraction

$$a^{2}(y''^{2} - y'^{2}) = b^{2}(x''^{2} - x'^{2});$$
b. 6. 
$$\frac{(y'' + y')(y'' - y')}{(x'' + x')(y'' - x')} = \frac{b^{2}}{a^{2}}$$
b. 6. 
$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{b^{2}}{a^{2}} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'}$$

x"-x' a2 y" + y'
baber wird burch Substitution Gleichung (1)

$$y-y'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x').$$

Es falle nun der Punkt (x", y") mit (x', y') zufammen; dann ift x" = x', y" = y', und die Ses cante wird eine Tangente am Punkte (x', y'); daher ist die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x'),$$

in welcher x' und y' bie Coordinaten bes Berührungs= punttes, und x, y bie veranberlichen Coordinaten irgend eines beliebigen Punttes in ber Tangente find. §. 187. Busat. Diefe Gleichung tann vereins facht werden, benn multiplicirt man beibe Seiten mit a2y', fo ift

$$a^{2}yy' - a^{2}y'^{2} = b^{2}xx' - b^{2}x'^{2}$$
b. h. 
$$a^{2}yy' - b^{2}xx' = a^{2}y'^{2} - b^{2}x'^{2}$$

$$= -a^{2}b^{2}.$$

welches bie gebrauchlichfte Gleichung ift.

Wenn a = b, so wird die Hyperbel gleichseitig, und die Gleichung der Langente ist

vy' - xx' = - a2.

§. 188. Den Durchschnitt ber Langente mit ben Uren ber unb y ju finben. (Rig. 63.)

Die Gleichung ber Tangente ist  $a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2$ .

(1) Sie schneibe die Are ber x z. B. in T. Dann ist y = 0; also  $x = \frac{a^2}{x'}$ ,

ober  $CT = \frac{CA^2}{CM}$ .

ober

(2) Sie schneibe bie Are ber y, 3. B. in t.

Dann 
$$x = 0$$
; also  $y = \frac{b^2}{y'}$ ,
$$Ct = \frac{CB^2}{Cm}$$

Darque folgt, daß jede halbe Ure eine mittelere Proportionale ift zwischen ber Abscisse eines Punttes und bem Theile berfelben, ber zwischen bem Durchschnitt mit ber Tangente, und bem Mittelpunkte liegt.

Erklarung. Die Linie MT zwischen bem Fuß ber Orbinate und bem Puntte, wo die Langente die Are trifft, heißt die Subtangente.

Erflarung. Die gerabe Linie im Beruhrunge=` puntte, fentrecht auf ber Tangente, heißt Normale.

§. 190. Die Gleichung ber Rormale gu finben.

Es beruhre PT (Fig. 63.) die Hyperbel in P, von diesem Punkte ziehe PG senkrecht auf PT.

Da nun PG burch ben Punkt (x', y') fenkrecht auf ber Linie  $y-y'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'}{y'}\,(x-x')$ 

fo ift bie Gleichung ber Sentrechten (19)

$$y - y' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} (x - x'),$$

in welcher x', y' bie Coordinaten bes Berührungspunt= tes und x, y bie irgend eines Punttes in ber Linie PG, als unbegrangt angefehn, find.

§. 191. Den Durchschnitt ber Normale mit ben Aren von x und y zu finden. (Fig. 63.)

Die Gleichung ber Normale ift

$$y - y' = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} (x - x')$$

Dann ift y = 0, unb - y' = 
$$-\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'}$$
 (x - x');

b. 6. 
$$x - x' = \frac{b^2}{a^2} \cdot x' = MG.$$

(2) Sie schneibe bie Are ber y, z. B. in g. \*)

Dann 
$$x = 0$$
; also  $y - y' = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y'}{x'} x'$ 

$$= \frac{a^2}{b^2} y';$$

b. b. 
$$y = \frac{a^2 + b^2}{b^2} y'$$
.

Erklarung. Die Linie MG zwischen bem Fuß ber Orbinate, und bem Punkte, wo die Normale bie Ure ber x schneibet, heißt Subnormale.

Der Ausbruck Normale beschrankt sich gewöhnlich auf die begränzte Linie PG. (§. 58.)

§. 192. Eine Tangente an eine Hoperbel zu ziehn, von einem gegebenen Puntte (x", y") außerhalb berfelben.

Es feien x', y' bie unbekannten Coordinaten bes Berührungspunktes. Da nun die Gleichung ber Tangente allgemein ift

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2$$

und ber Punkt (x", y") nach ber Annahme ein Punkt in ber Tangente ift, so hat man

$$a^2y'y'' - b^2x'x'' = -a^2b^2 \dots (1);$$

<sup>\*)</sup> Der Puntt g fehlt in der Figur.

auch, ba ber Berührungspunkt (x', y') in ber Sopperbel liegt, ift

$$a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2....(2).$$

Aus diefen beiben Gleichungen alfo tonnen bie Coordinaten x', y' bes Beruhrungspunttes bestimmt werben.

Da bie Gleichung, die fich burch Elimination aus (1) und (2) ergiebt, vom zweiten Grabe ift, so folgt, daß ce zwei Berührungspunkte giebt, mit andern Worten: baß von einem Punkte aufferhalb ber Hypersbel zwei Tangenten an diefelbe gezogen wersben konnen.

Aber die Lage ber Berührungspunkte kann birect gefunden werden, wie in §§. 41., 59. und 109., wenn man die Oerter der Gleichungen (1) und (2), in welchen x' und y' die Beränderlichen find, construirt.

Nun ist ber Ort von (2) bie gegebene Copperbel, und ber Ort von (1) ist eine gerade Linie, beren Lage bestimmt wird, wenn man nach und nach x', y' = o fest.

Wenn baher in der Gleichung 
$$a^2y''y' - b^2x''x' = -a^2b^2,$$

$$x' = 0, \text{ so iff } y' = -\frac{b^2}{y''},$$

$$y' = 0, \text{ so iff } x' = -\frac{a^2}{x''}.$$
Nimmt man also  $CN = \frac{b^2}{y''}$  und  $CM = \frac{a^2}{x''}.$ 

fo wird die Linie, die M, N perbindet, die Sopperbet in ben verlangten Berührungspunften fchneiden.

S. 193. Bufat 1. Die Gleichung ber Sehne, welche bie Berührungspunkte verbinbet, ift

$$a^2v''v' - b^2x''x' = -a^2b^2$$
.

§. 194. Bufat 2. Da CM von y" unabhängig ift, so folgt, baß, wenn von verschiedenen Puntten einer auf CX sentrechten Linie Tangenten=
Paare an bie hyperbel gezogen werben, bie Sehnen, welche bie zusammengehörigen Berahrungspuntte verbinden, alle burch bensel=
ben Puntt gehn werden.

## 3meites Rapitel.

Bon ber Spperbel, bezogen auf ben Focus.

§. 195. Die Entfernung irgend eines Punktes in ber Spperbel von bem einen und bem anbern Focus zu finden. (Fig. 64.)

Es sei ein Focus S, ber andere H, P irgend ein Punkt (x, y) in der Hyperbel, den Werth von SP und HP zu finden.

(1) Bon SP.

Allgemein ist die Entfernung zweier Punkte (x, y) und (x', y') nach §. 14.

$$=V\overline{(x-x')^2+(y-y')^2};$$

aber die Coordinaten von S find x' = ae, und y = 0, da der Punkt in der Are der x liegt;

baher 
$$SP^2 = (x - ae)^2 + y^2$$

$$= (x - ae)^{2} + (e^{2} - 1) (x^{2} - a^{2})$$

$$= x^{2} - 2aex + a^{2}e^{2} + e^{2}x^{2} - e^{2}a^{2}$$

$$- x^{2} + a^{2}$$

 $= a^2 - 2aex + e^2x^2;$ 

b. h. SP = ex - a.

(2) Auf gleiche Brise HP = ex + a.

Ertlarung. Die Entfernung irgend eines Punt: tes von bem Focus, heißt ber Focul= Ubftanb.

§. 196. Busat. Hieraus erhalt man, indem man SP von HP abzieht

HP - SP = 2a.

Mif andern Borten: ber Unterschied ber Focal= Abstande ift gleich ber Querare.

Aus dieser Eigenschaft kann bie Gleichung ber Spr perbel abgeleitet werben, wie in dem analogen Falle bei ber Ellipse. (§. 114.)

§. 497. Den Ort eines Punktes zu finden, fo baß ber Unterschied seiner Abstande von zwei festen Punkten beständig einer gegebenen Große 2a gleich ift. (Fig. 65.)

Es feien S und H die zwei festen Puntte, P ber Puntt, beffen Ort man fucht.

Berbinde S, H, S, P und HP, halbire SH in C; ziehe die Senkrechte PM auf SH, und verlängere dieses nach X zu unbegränzt; von C ziehe CY senkrecht zu CX, und nimm CX und CY als die Coordinaten Axen.

Es sei CM = x, MP = y, and SC = c;

bann ist 
$$SP^{2} = SM^{2} + MP^{2} = y^{2} + (c-x)^{2}$$
  
 $HP^{2} = HM^{2} + MP^{2} = y^{2} + (c+x)^{2}$ ...(1);  
 $PP^{2} = HM^{2} + MP^{2} = y^{2} + (c+x)^{2}$ ...(1);  
 $PP^{2} = SP^{2} = (c+x)^{2} - (c-x)^{2}$ ,  
ober  $PP^{2} = SP^{2} = (c+x)^{2} - (c-x)^{2}$ ,  
ober  $PP^{2} = SP^{2} = 2a$ ;  
 $PP^{2} = SP^{2} = 2a$ ;  
 $PP^{2} = SP^{2} = 2a$ ,  
 $PP^{2} = SP^{2} = 2a$ ,  
 $PP^{2} = SP^{2} = 2a$ ,  
 $PP^{2} = 2a$ ,  
 $PP^{2}$ 

welches die Gleichung einer Hyperbel ift, beren Querace = 2a, und beren conjugirte Ure =  $2\sqrt{c^2-a^2}$  ift.

If x = 0, so ist  $y^2 = -(c^2 - a^2) = -b^2$ , wo b die imaginaire Ordinate von C bedeutet.

S. 198. Die Polar-Gleichung ber Spperbel zu finden, wenn ber Focus ber Pol ift. (Fig. 66.)

(1) Es fei S ber Pol.

Dann iff r = ex - a, (195.)

aber 
$$x = CM = CS + SM$$
  
=  $ae + r cos (\pi - a)$ 

b. b. 
$$r = a \frac{e^2-1}{1+e \cdot \cos \theta}$$

welches bie gefuchte Gleichung ift.

(2) Es fei H ber Pol.

bann r' = ex + a;

X = CM = HM - HC.

 $= r' \cos \omega' - ae;$ 

b. 
$$h = r' = er' \cos \omega' - ae^2 + a;$$

b. b. 
$$r' = -a \frac{e^2 - 1}{1 - e \cos a}$$

welches bie gefuchte Gleichung ift.

S. 199. Zusatz 1. Berlangere PS, bis es bie Spererbel in p' trifft, bann, weil ASp = - - " if

$$Sp = a \frac{e^2 - 1}{1 - e \cos a}.$$

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{Sp} = \frac{1 + e \cos \omega}{a(e^2 - 1)} + \frac{1 - e \cos \omega}{a(e^2 - 1)}$$
$$= \frac{2}{a(e^2 - 1)}$$
$$= \frac{2}{SL},$$

b. h. ber halbe hauptparameter ift ein harmos nisches Mittel zwischen ben Segmenten irgenb einer Sehne, bie durch ben Focus geht.

(§. 202. Die Polar-Gleichung ber Soperbel zu finden, wenn der Mittelpunkt ber Pol ift. (Fig. 66.)

Nimm an, die Punkte C, P seien verhunden, und seize CP = e und Winkel PCA = v.

bann  $e^2 = x^2 + y^2$   $= x^2 + (e^2 - 1)(x^2 - e^2)$  (§§. 174. 175.)  $= e^2x^2 - e^2 (e^2 - 1)$   $= e^2e^2(1 - e^2\cos^2 v) = e^2(e^2 - 1);$ b.  $h. e^2(1 - e^2\cos^2 v) = e^2(e^2 - 1);$ 

baher 
$$e = a \sqrt{\frac{e^2-1}{1-e^2\cos^2}}$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

§. 203. Die Focal=Abstanbe irgend eines Punttes machen mit ber Tangente an biesem Puntte gleiche Wintel. (Fig. 67.)

Es sei TPt eine Tangente irgend eines Punktes P (x', y'); ziehe die Normale PG, und verbinde S, P, und H, P;

bann ift 
$$CG = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'$$
 (191.)= $e^2 x'$  (174.).  
Mun  $\frac{SG}{HG} = \frac{CG - CS}{CG + CS} = \frac{e^2 x' - ae}{e^2 x' + ae}$ 

$$= \frac{ex' - a}{ex' + a} = \frac{SP}{HP}$$
 (195.)

baher halbirt PG ben Winkel SPh. (Guft. VI. Sat 3.)

Nun ist der rechte Winkel GPT = GPz, und Winkel GPS = GPh, daher der übrig bleibende Winkel SPT = hPt = HPT, d. h. SP und HP machen gleiche Winkel mit der Tanzgente in P, wie zu beweisen war.

S. 204. Den Ort ber Punkte zu finden, in welchem eine Senkrechte vom Focus auf bie Tangente irgend eines Punktes, die Tangente schneibet. (Fig. 68.)

Es sei PT bic Tangente irgend eines Punktes (x', y') und SX eine Senkrechte von S auf PT, ben Ort von Y zu finden.

Bon Cziehe ble Sentrechte CQ auf PT, und ziehe Sq parallel zu PT, so baß fie bie verlängerte CQ in q treffe.

Dann iff 
$$CY^2 = CQ^2 + QY^2$$
  
=  $CQ^2 + Sq^2$   
=  $CT^2 \sin^2 T + CS^2 \cos^2 T$ ;

aber 
$$CT = \frac{a^2}{x'}$$
 (188), and  $CS = ae$ ;

baher 
$$CY^2 = \frac{a^4}{x^{/2}} \sin^2 T + a^2 e^2 \cos^2 T$$
  
 $= \frac{a^4}{x^{/2}} (1 - \cos^2 T) + a^2 e^2 \cos^2 T$   
 $= \frac{a^4}{x^{/2}} + \frac{a^2}{x^{/2}} (e^2 x^{/2} - a^2) \cos^2 T \dots$ 

aber tang 
$$T = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$$
 (186.);

beshalb wie in (§. 121.),  $\cos^2 T = \frac{x^{12} - a^2}{e^2 x^{12} - a^2}$ , und dies substituirt in (1)

$$CY^{2} = \frac{a^{4}}{x^{2}} + \frac{a^{2}}{x^{2}} (e^{2}x^{2} - a^{2}) \frac{x^{2} - a^{2}}{e^{2}x^{2} - a^{2}}$$

$$= \frac{a^{4}}{x^{2}} + \frac{a^{2}}{x^{2}} (x^{2} - a^{2}),$$

$$= \frac{a^{4}}{x^{2}} + a^{2} - \frac{a^{4}}{x^{2}}$$

daher CY = ± a, deshalb ist der Ort von Y ein Kreis, beschrieben über der Querare. S. 205. Das Rechted aus ben Sentrechten, bie von bem einen und bem andern Focus auf bie Langente irgend eines Punttes gezogen werben, ift gleich bem Quabrate ber halben conjugirten Ure. (Fig. 68.)

Benn SY = ST sin T,

ober  $ST = CS \rightarrow CT = ae - \frac{a^2}{x'} = \frac{a}{x'}$  (ex' - a);

b. h.  $SY = \frac{a}{x'} (ex' - a) \sin T$ . Auf gleiche

Weise

 $HZ = \frac{a}{x'} (ex' + a) \sin T;$ 

b. b. SY • HZ =  $\frac{a^2}{x^{1/2}}$  (e<sup>2</sup>x<sup>1/2</sup> - a<sup>2</sup>) sin<sup>2</sup> T;

aber so wie in der Ellipse (§. 122.) ist  $\sin^2 T = \frac{e^2 x'^2 - x'^2}{e^2 x'^2 - a^2}$ 

baher SY·HZ =  $\frac{a^2}{x'^2}$  (e<sup>2</sup>x'<sup>2</sup> - a<sup>2</sup>) · x'<sup>2</sup>  $\frac{(e^2 - 1)}{e^2 x'^2 - a^2}$ = a<sup>2</sup> (e<sup>2</sup> - 1) = b<sup>2</sup>,

wie zu beweisen war,

### Drittes Rapitel.

Bon ber Spperbel, bezogen auf irgend ein Spfem conjugirter Diameter.

#### Erfter Abiconitt.

Bon conjugirten Diametern im Allgemeinen.

§. 206. Den Ort ber Mittelpunkte irgenb einer Anzahl paralleler Sehnen zu finden. (Fig. 69. a. a.)

Es sei Pp irgend eine Sehne, O ihr Mittelpunkt; von ben Punkten O, P, p ziehe die Senkrechten ON, PM, pm auf die Ax.

Es sei CN = X, NO = Y; ift nun die Gleichung für Pp

$$y = ax + \beta \dots (1),$$

fo wird die Gleichung, welche die Werthe von y in den Punften P, p enthalt, nach (§. 185.) fein

$$y^{2} + \frac{2b^{2}\beta}{a^{2}\alpha^{2} - b^{2}} y + b^{2} \frac{a^{2}\alpha^{2} - \beta^{2}}{a^{2}\alpha^{2} - b^{2}} = 0.$$

Nun, da in seber quadratischen Gleichung ber Coefficient bes zweiten Gliebes, mit seinem eigenthumlichen Zeichen, gleich ift ber Summe ber Wurzeln mit veranbertem Zeichen, so ist

$$\frac{2b^2 \beta}{a^2 n^2 - b^2} = - (PM + pm).$$

Da aber O ber Mittelpunkt von Pp ift, fo ift

$$ON = \frac{Pm + pm}{2};$$

$$Y = \frac{-b^2 s}{a^2 a^2 - b^2} \cdot \dots \cdot (2).$$

b. h.

Run genugen X und Y ber Gleichung (1), ba fie bie Coordinaten eines Punttes in Pp find, baber

$$X = \frac{1}{a} (Y - \beta)$$

$$= \frac{-a^2 \lambda \beta}{a^2 a^2 - b^2} \dots (3).$$

Um bie Beziehung zwischen X und Y zu erhalten, muß man aus (2) und (3) & eliminiren;

baher 
$$\frac{a^2 a^2 - b^2}{b^2} Y = \frac{a^2 a^2 - b^2}{a^2 a} X;$$
  
b. h.  $Y = \frac{b^2}{a^2 a} X.$ 

Nun bleibt a baffelbe für alle Sehnen parallel zu Pp (18.), baher brudt die eben gefundene Gleichung bas Berhaltniß ber Coordinaten ihrer Mittelpunkte aus, und ba fie vom ersten Grade ist, so ist ber gesuchte Ort eine gerabe Linie.

Erklarung. Die gerade Linie, von der eben gezeigt ift, daß sie der Ort der Mittelpunkte irgend einer Anzahl paralleler Sehnen ift, heißt ein Olameter, und die Punkte, in welchen sie die Kurve schneidet, heißen die Scheitel.

Die Buchstaben X und Y wurden eingeführt, um bie beiden Arten ber Coordinaten zu unterscheiben, und bie Gleichung eines Diameters, der irgend eine Sehne

$$y = ax + a$$

halbirt, fann immer geschrieben werben

$$y = \frac{b^2}{a^2 a} x.$$

Aus biefer Form ift flar (6.), bag jeber Diameter burch ben Mittelpunkt geht.

§. 207. Den Durchschnitt irgend eines Diae. meters mit ber Syperbel zu finden. (Fig. 70.)

Da die Gleichung irgend eines Diameters ift

$$y = ax$$

und die der Spperbel

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$
,

so werben bie Coordinaten bes Durchschnittspunktes erhalten werben, wenn man biese beiben Gleichungen combinirt; man hat bann

und  $y = \pm \frac{ab_a}{\sqrt{b^2 - a^2_a^2}} = PM$  ober pm als die gesuchten Coordinaten.

Ş. 208. Zusat 1. Da AM = am, und PM = pm, so folgt, baß jeber Diameter im Mittelpunkt halbirt wirb.

§. 209. Infag 2. Damit ber Diameter bie Speperbel treffe, muß sein

$$b^2 > a^2 a^2,$$

Bon bem Scheitel A (Fig. 71.) ziehe AE und Ae fentrecht zu AC, und beides gleich CB; ziehe CE und Ce, und verlängere fie unbegränzt nach Z und z.

Denn da tang 
$$ZCX = \frac{EA}{AC} = \frac{b}{a}$$

$$\text{unb} \qquad \text{tang } \mathbf{z}\mathbf{C}\mathbf{X} = \frac{\mathbf{e}\mathbf{A}}{\mathbf{A}\mathbf{C}} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}},$$

fo folgt, daß die Diameter CZ, Cz die Rutve in einer begrangten Entfernung nicht treffen werben.

Die Linien CZ, Cz beißen wegen biefes Umftanbes Afymptoten.

S. 210. Wenn ein Diameter burch einen gegebenen Puntt gezogen ift, bie Gleichung für irgend eine feiner Ordinaten zu finden.

Wenn x', y' die Coordinaten bes gegebenen Punttes sind, so ist die Gleichung bes Diameters, der durch ihn gezogen ist,

$$y = \frac{y'}{x'} \times \dots \dots (1).$$

Es sei  $y = sx + \beta \dots (2)$ , bie gesuchte Gleichung für irgend eine Ordinate, dann ift

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b^2}{a^2 a} (206);$$

b. b. 
$$a = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'}$$

baber ift bie Gleichung irgend einer Orbinate eines Diagmeters, ber burch (x', y') geht,

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x + \beta.$$

S. 211. Bufat. Bergleicht man biefe Gleichung mit bet Gleichung ber Tangente (186.), fo fieht man,

daß die Langente an dem Scheiftelirgend eines Diameters parallel ist mit den Ordinaten Viefes Diameters.

the section is a first the section of

S. 212. Benn zwei Diameter gegeben sind, und die Ordinaten des einen find parallel zu bem andern, so werden die Ordinaten bes letztern dem erstern parallel fein. (Alg. 72.)

Es seien CP, CD zwei Dlameter, und MN, QR beziehungsweise von ihnen halbirte Sehnen; wird nun' MN parallel angenommen zu CD, sp ist zu beweisen, bas QR parallel zu CP ist.

Sind die Gleichungen fur CP, CD

$$y = a^{x} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$y = a^{x} \cdot (2)$$

bann finb nach (§. 210.) bie Gleichungen fir MIN, QR

$$y = \frac{b^2}{a^2 a} x + \beta \dots (1'),$$
  
 $y = \frac{b^2}{a^2 a'} x + \beta' \dots (2').$ 

Aber wenn MN paraffel gu CD ift, so ift

$$a' = \frac{b^2}{a^2 a}$$
 (18.);  
 $a = \frac{b^2}{a^2 a'}$ 

baher wird burch Substitution in (2% bie Gleichung für QR

$$y = \alpha x + \beta',$$

b. h. (18.) QR ift parallel zu CP, wie zu beweisen war. Daher ist jeder ber beiden Diameter CP, CD parallel zu ben Ordinaten bes anbern.

Diameter in biefer Beziehung zu einander, heißen conjugirte Diameter.

S. 213. Bufat 1. Deshalb, menn bie beiben Diameter ... · · · y :== ax, y = a'x

conjugirte au einander find, fo ift

$$y = x$$

§. 214. Daher, wenn y = \*\*
ein Djameter ift, so ist

$$y = \frac{b^a}{a^a} x$$

ber ibm conjugirte.

S. 215. Bufat 3. Da .(a) jeben Werth zwischen o und & haben tann, so ift die Anzahl von Paaren conjugirter Diameter unbegrangt.

Ift . = 0, ober nimmt man als erften Diameter bie Querare Aa an, so.ift

$$a' = \frac{b^2}{a^2 \cdot o} = \infty,$$

baber ift ber conjugirte Durchmeffer zu Aa, inbem er rechtwinklicht auf bemfelben ift, bie conjugirte Ure Bb; baber find die Aren conjugirte Diameter; und es kann genau, wie in §. 131. gezeigt morben, bag fie Bie einzigen conjugirten Durchmeffer find, welche rechtwinklicht gu einander finb.

g. 216. 3nfag 4. 3ft (x', y') irgend ein Puntt in ber Sopperbel, so ift ber burch ihn gehende Diameter  $y = \frac{y'}{x'} x;$ 

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} x$$

ber ihm correspondirende conjugirte Diameter ift.

Aber bie Gleichung ber Tangente an ben Punkt (x', y') ift (186.)

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} (x - x'),$$

woraus folgt (18.), baß bie Tangente an bem Scheitel irgend eines Diameters parallel ift zu bem entsprechenben conjugirten Diameter.

§. 217. Bon zwei beliebigen conjugirten Diametern tann nur einer bie Rurve treffen.

Denn es feien

$$y = ax$$
 $y = a'x$ 

beliebige conjugirte Diameter.

Es wurde gezeigt (209.), daß kein Diameter bie Rurve treffen kann, wenn nicht

$$a < \frac{b}{a}$$
.

Man nehme nun an, baff in einem gegebenen Sysfteme ber erfte Diameter Die Rurve treffe, bann ift

$$a < \frac{b}{a'},$$

$$aa' = \frac{b^2}{a^2} (213)$$
b

b. h.

aber

$$x' > \frac{b}{a},$$

und folglich fann ber zweite Diameter bie Rurve nicht treffen.

§. 218. Die Gleichung ber Spperbel zu finben, wenn fie auf irgend zwei beliebige conjugirte Durchmeffer ale Apenbezogen wird. (Fig. 73.)

Es seien CP, CD irgend ein Spstem conjugirter Diameter, als Aren ber Coordinaten angenommen, und x, y und x', y' seien die Coordinaten irgend eines Puntstes in bet Hyperbel, wenn sie beziehungsweise auf die alten und neuen Aren bezogen ist.

Der 3wed ift nun, x und y burch x' und y' auszudrücken, und bann die fich ergebenden Werthe in die Gleichung

a²y² — b²x² = — a²b² ..... (1) zu substituiren, welches bann die gesuchte Gleichung geben wird.

Mun tann eben fo, wie in ber Ellipfe (132.), gezeigt werden, daß, wenn 3 = X'CA und  $\varphi$  = Y'CA ift,

$$x = x' \cos 9 + y' \cos \varphi,$$
  

$$y = x' \sin 9 + y' \sin \varphi;$$

baber burch Substitution in (1),

$$a^{2} \left\{ x' \cos \theta + y' \cos \phi \right\}^{2} - b^{2} \left\{ x' \sin \phi + y' \sin \phi \right\}^{2}$$

oter  $= -a^2b^2$ .  $(a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi)y'^2 + (a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta)x'^2$ 

+2x'y' (a<sup>2</sup> sin 3 sin  $\phi$  - b<sup>2</sup> cos 3 cos  $\phi$ ),

There tang 
$$9 \cdot \tan \varphi = \frac{b^2}{a^2}$$
 (213.);

baber a² sin 3 sin  $\varphi$  — b² cos 3 cos  $\varphi$  = 0; deshalb verschwindet das Glied, welches x', y' enthalt, und die gesuchte Gleichung ist von der Form

$$(a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi) y'^2 - (b^2 \cos^2 9 - a^2 \sin^2 9) x'^2$$
  
=  $-a^2 b^2 \dots (2)$ .

Wenn nun die Are CX' die Hyperbel trifft, ist y' = 0 und x' = CP = a' daher  $b^2 \cos^2 9 - a^2 \sin^2 \phi = \frac{a^2 b^2}{2^{\prime 2}}$ .

Nun sei x' = 0, da dann die Are Cy'nach (§. 217.) die Hyperbel nicht trifft, kann man y' oder CD = bel 1 annehmen;

baher  $a^2 \sin^2 \phi - b^2 \cos^2 \phi = \frac{-a^2b^2}{-b'^2} = \frac{a^2b^2}{b'^2};$ 

beshalb burch Substitution in (2),

$$\frac{a^2b^2}{b'^2} y'^2 - \frac{a^2x^2}{a'^2} x'^2 = - a^2b^2,$$

ober, wenn man jebes Glieb burch a2b2 bivibirt,

$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{x'^2}{a'^2} = -1,$$

ober

$$a^{/2}y^{/2} - b^{/2}x^{/2} = -a^{/2}b^{/2},$$

welches beibes bie gesuchte Gleichung ift.

§. 219. Zusat 1. hieraus ergiebt fich, wenn man bie Accente ber Coordinaten weglaßt,

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 - a'^2}$$
.

§. 220. Bufat 2. Die Form ber Gleichung zu finden, wenn die Coordinaten in P ben Scheitel bes Diameters CP anfangen. (Fig. 73.)

Es sei  $PV \Rightarrow x'$ , dann ist x = CP + PV= a' + x'.

Diesen Werth von x in Jusat 1. substituirt, hat man  $y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(x'+a')^2 - a'^2}$ ,

ober ben Accent von x meggelaffen

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 + 2a'x},$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

§. 221. Jufat 3. Die Gleichungen (1), (2) und (3) find von berfelben Form, wie die Gleichungen in Beziehung auf die Aren (§. 175.), und bruden eine Gizgenschaft ber Hyperbel aus;

bann  $x^2 - a'^2 = (x + a') (x - a') = PV \cdot VG$ , und  $2a'x + x^2 = (2a' + x) x = PV \cdot VG$ ; baher  $VQ^2 = \frac{PC^2}{CD^2} \cdot PV \cdot VG$ ,

ober PV · VG : QV² = PC² : CD²
b. h. bas Rechteck ans ben Abschnitten irgenbeines Diameters verhält sich zu bem Quadrate ber Ordinate, wie bas Quadrat bes halben Diameters zu bem Quadrat seines halben conjugirten Diameters.

- S. 222. Aus bem vorstehenden S. ift flar, bag bie Gleichung ber Spperbel biefelbe Form behalt, bie Aren ber Coordinaten mbgen rechtwinklicht ober schiefwinklicht sein; woraus folgt, wenn die Aren schiefwinklicht find,
- (1) daß wenn die Gleichung der Quer-Are Aa ift y == ax, die Gleichung für die conjugirte Are fein wird

$$y = \frac{b^{2}}{a^{2}} x_{0}$$

(2) Daß bie Gleichung einer Tangente irgend eines Punttes (x', y') ift

$$a^{1/2}yy' - b^{1/2}xx' = -a^{1/2}b^{1/2}$$
.

§. 223. Den Durchschnitt einer Langente mit irgend zwei conjugirten, als Aren betrach= teten, Diametern zu finden. (Fig. 74.)

Es sei eine Tangente gezogen am Punkte Q (x', y') und treffe CP in T, und CD in t, ziehe die Ordinaten QV, Ov. Dann sei die Gleichung ber Tangente

$$a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2;$$

begegnet nun die Aangente CX in T, so ist y = 0; und  $x = \frac{a'^2}{x'}$ , oder CT =  $\frac{CP^2}{CV}$ .

Die Tangente begegne ber CY in t, bann x = 0; und  $y = \frac{-b'^2}{y'}$ , ober  $Ct = \frac{CD^2}{Cv}$ . Woher die Durchschnittspunkte bekannt sind.

Siehe (188.), welches nun ein besonderer Fall bie-

§. 224. Wenn von verschiedenen Punkten einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, Tangenten = Paare an die Hyperbel gezogen werden, so werden die Linien, welchediezusam= mengehbrigen Berührungspunte verbinden, alle durch denselben Punkt gehn.

Es sei C ber Mittelpunkt ber Hyperbel, MN bie gegebene Linie, ziehe eine beliebige Sehne mn parallel zu MN, und halbire sie durch den Diameter CX; von C ziehe CY parallel zu mn oder MN, dann sind CX, CY conjugirte Durchmesser (212.), und wird die Hyperbel auf diese als Axen bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a^{/2}y^2 - b^{/2}x^2 = -a^{/2}b^{/2}$$
 ..... (1)

Von irgend einem Punkte (x", y") in MN ziehe ein Tangenten- Paar an die Hyperbel, so kann, wie in §. 192., gezeigt werben, daß die Gleichung der Linie, welche die Berührungspunkte verbindet, ist

 $a'^2y''y' - b'^2x''x' = -a'^2b'^2 \dots$  (2), in welcher x', y' die veränderlichen Coordinaten des Béschungspunktes find.

Es, schneibe nun bie gerade Anie (2) die Are ber x, bann ift y' = 0 und baber

$$x'=\frac{a'^2}{x''};$$

weshalb ber Durchschnittspunkt berfelbe fein wird, far alle Punkte, beren Absciffen = x" find, b. h., far alle Punkte in ber Linie MN, wie zu beweisen war.

§. 225. Busat. Der Durchschnittspunkt liegt in bem Diameter, ber bem conjugirt ift, welcher ber gegebenen Linie parallel ift.

§. 225. Benn von bem Durchschnittspunkte zweier Tangenten ein Diameter gezogen wird, so halbirt er bie Linie, welche bie Berührungs= punkte verbindet.

Denn die Gleichung einer Ordinate eines Diameters, ber burch (x", y") geht, ist (210.)

$$y = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x + s \dots$$
 (1),

und bie Gleichung ber Linie, bie bie Berührungspuntte verbinbet, ift

$$y' = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x''}{y''} x' - \frac{b'^2}{y''} \dots (2),$$

weshalb die lettern, indem fie (18.) ber ersteren parallel ift, auch eine Ordinate und beshalb halbirt ift.

§. 227. Wenn burch irgent einen Punkt im nerhalb ober aufferhalb ber Spperbel zwei gerabe, ber kage nach gegebene Linien gezoz gen werben fo, baß sie die Rurve treffen, so wird bas Nechted aus ben Abschnitten ber einen in einem beständigen Berhaltniß zu bem Rechtzede aus ben Abschnitten ber andern sein. (Fig. 75.)

Es fei O irgend ein Punkt innerhalb der Hyperbel, durch welchen zwei gerade Linien Pp, Qq, deren Lage bekannt ift, gezogen werden fo, daß sie die Hyperbel in P, p und Q, q treffen, zu beweisen nun, daß

 $OP \cdot Op : OQ \cdot Oq$ 

in einem conftanten Berhaltniß ift.

Durch O ziehe ben Diameter CX, und sein conjus girter Diameter sei CY; wird nun die Sypperbel auf biese als Axen bezogen, so ist ihre Gleichung

$$a^{2}y^{2} - b^{2}x^{2} = -a^{2}b^{2}$$
 ..... (1).

Durch P ziehe PM parallel zu CY, und setze OP = r, CO = d;

bann ift 
$$\frac{PM}{PO} = \frac{\sin POM}{\sin PMO} = \frac{\sin r, x}{\sin x, y}$$

baher 
$$y = \frac{\sin r, x}{\sin x, y} r.$$

Auf gleiche Beise 
$$x = 3 - \frac{\sin r, y}{\sin x, y} r$$
,

oder: bezeichnet man ben Coefficienten von r mit p, im ersten, und mit q im zweiten Falle, und substituirt diese Werthe von x und y in (1),

$$a^{2}p^{2}r^{2}-b^{2}\left\{ r^{2}-2r^{2}+q^{2}r^{2}\right\} =-a^{2}b^{2};$$

b. b. 
$$r^2 + \frac{2^3 q b'^2}{a'^2 p^2 - b'^2 q^2} r - \frac{b'^2 (b^2 - a'^2)}{a'^2 p^2 - b'^2 q'^2} = 0$$

in welcher die Werthe von r find OP, Op; baher OP op = 
$$\frac{b^{\prime 2} \left( b^2 - a^{\prime 2} \right)}{a^{\prime 2} p^2 - b^{\prime 2} q^2}.$$

Auf gleiche Beife

wenn OQ = r' und p' und q' bezeichnen sin r', x

$$unb \frac{\sin r', y}{\sin x, y},$$

$$OQ \cdot Oq = \frac{b^{/2} (\mathfrak{F}^2 - a^{/2})}{a^{/2}p^{/2} - b^{/2}q^{/2}},$$

weswegen

$$OP \cdot Op : OQ \cdot Oq = a'^2p'^2 - b'^2q'^2 : a'^2p^2 - b'^2q^2$$

welches ein conftantes Berhaltniß ift, wie zu beweisen war.

#### 3meiter Abschnitt.

#### Bon ben Eigenschaften conjugirter Diameter.

§. 228. Wenn ein Diameter burch einen gegebenen Punkt P (x', y') gezogen ift, bie imas ginairen Coordinaten des Endpunktes feines conjugirten Diameters zu finden. (Fig. 73.)

Es seien CP, CD irgend zwei conjugirte Diameter, von benen ber erste burch ben gegebenen Punkt P (x', y') gezogen ist; bann wird der letztere CD die Hyperbel nicht treffen. (§. 217.) Wenn nun

$$y = \frac{y'}{x'} \times \dots (1)$$

bie Gleichung von CP ift, so wird

$$y = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'}{y'} \times \dots (2),$$

bie Gleichung fur CD fein; beshalb wird man bie imaginairen Coordinaten bes Punttes D finden, wenn man Gleichung (2) mit biefer Gleichung verbindet,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$
 ..... (3).

Substituirt man in (3) ben Werth von y aus (2) und bividirt bas Ergebniß burch b2, so hat man

§. 229. Die Differenz ber Quabrate its gend zweier conjugirter Diameter ift gleich ber Differenz ber Quabrate ber halben Axen. (Fig. 73.)

Es seien Cp, CD irgend zwei halbe conjugirte Dias meter, bezeichnet man sie nun beziehungsweise mit a', und b/-1, so ist

$$a'^2 = x'^2 + y'^2$$
 $-b'^2 = -\frac{a^2}{b^2}y'^2 - \frac{b^2}{a^2}x'^2$ 

b. 6. 
$$a^{12} - b^{12} = x^{12} - \frac{a^2}{b^2} y^{12} + y^{12} - \frac{b^2}{a^2} x^{12}$$

$$= \frac{b^2 x^{12} - a^2 y^2}{b^2} + \frac{a^2 y^{12} - b^2 x^{12}}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{b^2} - \frac{a^2 b^2}{a^2}$$

$$= a^2 + b^2,$$

wie zu beweisen war.

S. 230. Wenn an ben Enbpunkten irgenb zweier Diameter Tangenten gezogen werben, so daß sie ein Parallelogram bilben, so ift die Flache aller solcher Parallelogramme bestans big. (Fig. 76.)

Es seien Pp, Dd irgend zwei conjugirte Diameta, und die Tangenten an P und p, D und d, werden verlängert, bis sie sich treffen, so ist klar (216), daß sie ein Parallelogram bilben werben.

Von P und T ziehe die Sentrechten PF, TQ auf DC.

Alsbann ift bie Flache bes ganzen Parallelogrammes PC.

Mor. PF = TQ = CT sin TCQ = 
$$\frac{a^2}{x'} \cdot \frac{Dm}{DC}$$
 (188.);

baher PF 
$$\cdot$$
 CD =  $\frac{a^2}{x'} \cdot mD$ 

<sup>\*)</sup> Die Einie Dm, welche nicht in ber Figur ift, ift bie imaginaire Ordinate bes Punttes D.

$$= \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{b\sqrt{-1}}{a} x'$$

$$= ab \sqrt{-1} \dots (2),$$

deshalb ift burch Substitution in (1) bie Flache bes ganzen Parallelogrammes

 $=4ab\sqrt{-1}$ 

und ift baber eine conftante Große.

Die imaginaire Große bei biesem Ausbrucke zeigt an, baß bas Parallelogram nicht, wie in ber Ellipse, ber Kurve umschrieben ift.

... §. 231. Zufan 1. Aus ber Gleichung (2) PF · CD = ab · 
$$\sqrt{-1}$$
,

aber CD = b/-1, und PF = PC sin PCD = a' sin 2, wenn PCD

folgt

ab = a'b' sin y

§. 232. Bufat 2. Hieraus fann ber Werth bon PF gefunden werben;

ben  $PF = \frac{ab}{CD} = \frac{ab}{Va'^2 - (a^2 - b^2)}$ 

§. 233. Da  $a^2-b^2=a'^2-b'^2$ , so können bei ber Hyperbel bie conjugirten Diameter nicht einander gleich sein.

§. 234. Das Rechted aus ben Focal Abstanden irgend eines Punktes ift gleich bem Quadrate bes halben Diameters, welcher bem conjugirt ift, ber burch ben gegebenen Punkt geht. (Fig. 64.)

[10 \*]

Es sei P irgend ein Punkt, CD ber halbe zu CP conjugirte Diameter; verbinde P, S und P, H; zu ber weisen nun, haß

SP · PH = CD<sup>2</sup>.  

$$\mathfrak{D}_a \text{ CP}^2 - \text{CD}^2 = a^2 - b^2$$
;  
(6) iff  $\text{CD}^2 = \text{CP}^2 - a^2 + b^2$   
 $= x^2 + y^2 - a^2 + b^2$   
 $= x^2 + (e^2 - 1)(x^2 - a^2) - a^2 + b^2$   
 $= e^2 x^2 - e^2 a^2 + b^2$   
 $= e^2 x^2 - a^2$   
 $= (ex - a) (ex + a)$   
 $= \text{SP} \cdot \text{HP (195.)}.$ 

§. 235. Es feien CP, CD itgenb zwei comjugirte Diameter, und eine Cangente an P treffe die Uren ber Spperbel in T und t; zu beweisen, bag PT · Pt · == CD2. (Rig. 77.)

Werben CP, CD als Coordinaten Aren angenomemen, fo find die Gleichungen für CA, CB, (§. 222.)

$$y = ax$$

$$y = \frac{b^{2}}{a^{2}} x.$$

Es fei

$$x = a^{\prime}$$
 ober CP, bann ist y ober PT =  $aa^{\prime}$  and (1)  
und y ober Pt =  $\frac{b^{\prime 2}}{a^{\prime}a}$  .... (2);

baher  $PT \cdot Pt = b^2 = CD^2$ .

# Dritter Abschnitt. Bon Supplementar-Sebnen.

Erklarung. Benn von ben Scheiteln irgend eines Diameters zwei gerade Linien nach einem Punkte in ber Spperbel gezogen werden, so beißen biese Supplementar-Sebnen.

§. 236. Benn zwei Supplementar. Sehnen gezogen find, und bie Gleichung ber einen ift gegeben, bie Gleichung ber anbern zu finden. (Gig. 78.)

Wird die Superbel auf irgend zwei conjugirte Diameter bezogen, fo ift ihre Gleichung

$$a^{2}y^{2}-b^{2}x^{2}=-a^{2}b^{2}.....$$
 (1).

Durch irgend einen Punkt P (x', y') ziehe ben Diameter Pp, und es seinen QP, Qp irgend zwei Supplementars Sehnen, so ist erforderlich, wenn die Gleichung für QP ist  $y-y'=\alpha(x-x')$ .... (2) die Sleichung für Qp zu sinden.

Da die Coordinaten von P, x', y' find, fo werben bie von p fein — x', — y'; beshalb wird die Gleischung für QP nach §. 12. von ber Form fein

$$y + y' = a'(x + x') \dots (3)$$

worin a' zu finden ift.

Da die Linien, beren Gleichungen (2) und (3) finb, fich in Q schneiben, so find die Coordinaten dieses Punktes in beiben einander gleich; betrachtet man daher x und y als dieselben in beiben Gleichungen, so hat man, wenn man sie mit einander multiplicirt,

$$y^2-y'^2 = aa' (x^2 - x'^2);$$
b. fi. 
$$aa' = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2} \cdot \dots \cdot (4),$$

ba aber x', y' bie Coordinaten von P; einem Punkte in ber Hyperbel find, so werden sie Gleichung (1) ein Genuge leiften;

bayer.  $a^{12}y^{12} - b^{12}x^{12} = -a^{12}b^{12}$ .

Bieht man biese von (1) ab, so hat man a'2 (y2-y'2) - b'2 (x2-x'2) = 0;

baher

$$\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}=\frac{b'^2}{a'^2},$$

beshalb burch Substitution in (4)

$$a_{n'} = \frac{b'^2}{a'^2}$$
 into  $a' = \frac{b'^2}{a'^2 a}$ 

hiernach wird die Gleichung für pQ burch Substitution in (3)

$$y+y'=\frac{b'^2}{a'^2s}(x+x').$$

§. 237. Busat 1. Pp falle mit ber Querare Aa zusammen, bann ist die Gleichung fur aQ, gezogen burch ben Punkt a (- a, o)

$$y = *(x + a),$$

beshalb ist bie Gleichung fur AQ (Fig. 79.), gezogen burch ben Punkt A (3, 0)

$$y=\frac{b^{/2}}{a^{/2}a}(x-a).$$

§. 238. Bufat 2. Wird bie Hoperbel auf ihre Aren bezogen, so hat man nur a und b für a' und b' in obige Gleichung zu substituiren.

S. 239. Wenn zwei Diameter zu irgend zwei Supplementar=Sehnen parallel gezogen werben, so find sie einander conjugirt.

Da die Gleichungen für Irgend gwei Supplementar-Sebnen find

$$y - y' = a(x - x') \dots (1)$$
  
unb  $y + y' = \frac{b'^2}{a'^2 a} (x + x') \dots (2),$ 

fo fete, ein Diameter fei parallel gezogen zu ber Sehne, beren Gleichung (1) ift, fo ift feine Gleichung

ba nun die Gleichung feines conjugirten Diameters ift  $y = \frac{b^{2}}{a^{2}} x,$ 

fo folgt, daß ber lettere parallel ift zu (2), wie zu beweisen mar.

6. 240. Bufat 1. hiernach tann ein Diameter gezogen werben, ber einem gegebenen confugirt ift.

Es fei Pp ber gegebene Diameter, (Fig. 78.) und juerft, bie Querare fei gegeben.

Bon a giebe aR parallel ju Pp, und verbinde R, A; wird bann Dd burch C parallel gu RA gezogen, fo ift bies ber conjugirte Diameter gu Pp.

3weitens, die Querare sei nicht gegeben. (Fig. 80.)

Ziehe irgend einen beliebigen Diameter Rr, durch r giebe rQ parallel Pp, giebe QR; wenn bann Dd burch C parallel zu RQ gezogen wird, so ift es ber zu Pp conjugirte Diameter.

Diese Folgerungen find an fich klar.

§. 241. Bufat 2. hieraus ift eine fehr einfache Methode abzuleiten, eine Tangente an einen gegebenen Punkt ber Soperbel zu giebn.

Es fei P ber gegebene Punkt \*), und zuerft fei bie Querare gegeben.

Biebe PC, und die Sehne al parallel, bamit versbinde Q, A; wird bann PT parallel zu QA gezogen, so beruhrt es die Spperbel in P.

3weitens, wenn die Querare nicht gegeben ift, ziche irgend einen Diameter BCr, der die Hyperbel in R, r trifft; verbinde P, C, ziehe r Q parallel zu PC, verbinde Q, R; wird bann PT parallel zu QR gezogen, so wird es eine Langente in P sein.

S. 242. Den Bintel, ben bie hauptsupples mentar-Sehnen bilben, ju finden. (Fig. 79.)

1

Seize ben Punkt Q (x', y') als Durchschnittspunkt ber Sehnen AQ, aQ und nimm an, die Hyperbel sei auf ihre Uren bezogen; find nun die Gleichungen für Qa, QA

$$y = a \quad (x + a)$$

$$y = a' \quad (x - a),$$
fo iff tang AQa =  $\frac{a' - a}{1 + aa'}$  (21.)

ober ba
$$aa' = \frac{b^2}{a^2},$$

$$tang AQa = \frac{a' - a}{1 + \frac{b^4}{a^2}} \dots (1),$$

Mun if  $\phi' = \tan QAX = \frac{y'}{x'-x}$ 

<sup>&</sup>quot;) Die Figuren in Diesem Jufațe mogen burch ben Lefer ergangt werben.

und
$$a = tang QaX = \frac{y'}{x' + a};$$
b. b. 
$$a' - a = y' \cdot \left(\frac{1}{x' - a} - \frac{1}{x' + a}\right)$$

$$= y' \cdot \frac{2a}{x'^2 - a^2} = \frac{2ab^2}{a^2y'};$$
baher burch Substitution in (1)

baher burch Substitution in (1)  $\tan AQa = \frac{2ab^2}{y'(a^2+b^2)}.$ 

S. 243. Bufat 1. Da bas Zeichen biefer Große' positiv ift, so ift ber Wintel immer spit; beshalb also auch ift ber Wintel, ben zwei conjugirte Durchmeffer bilzbet, immer spit.

§. 244. Zusat 2. Wenn y' = 0, so ist tang AQa =  $\infty$ , beshalb ist ber Winkel ein rechter; wenn y' =  $\infty$ , tang AQa = 0, deshalb ist ber Winkel = 0; beshalb kann ber spige Winkel, den die Supples mentars Sehnen in der Hyperbel bilden, durch alle Grade der Größe zwischen o und  $\frac{\pi}{2}$  gehn.

§. 245. 3mei conjugirte Diameter guziehn, bie einen gegebenen Bintel einschließen.

Die analytische Auflbsung ber Aufgabe ift ber für bie Ellipse abnlich, außer bag bie sich ergebende Gleischung eine quadratische vom vierten Grabe ift. Wir wers ben baber sogleich die geometrische Construction geben.

Biebe irgend einen Diameter Rr (Fig. 81.), der die Hyperbel in R, r trifft, und über demfelben beschreibe einen Kreisabschnitt, der den gegebenen Winkel fast und die Hyperbel in Q schneibet, verbinde QR, und Qr, und

hiesen parallel ziehe bie halbe Diameter CP, CD; biese find die gesuchten Diameter.

Denn da fie den Supplementar-Sehnen QR, Qr parallel find, so find fie conjugirte Diameter, und Winkel PCD = RQr, baher dem gegebenen gleich.

Die Aufgabe gestattet, wie in der Ellipse, noch eine zweite Auflbsung. Siehe §. 164.

Bei ber Ellipse mußte ber gegebene Binkel, ben zwei Diameter bilben, innerhalb gewiffer Granzen sein, aber bei ber Hyperbel ift eine solche Beschränkung nicht nothig. (244.) und (164.)

Nach ben bisher befolgten Grundsagen wird es bem Leser teine Schwierigkeit machen, von ben vermischten Satzen über die Ellipse, Rap. 4., §. 165., folde abzus leiten, welche anwendbar bei ber Hoperbel find.

## Biertes Rapitel.

Von den Asymptoten der Hyperbel.

Es wurde §. 209. gezeigt, daß gewiffe Diameter ber Hypperbel die Kurve erst in einer unendlichen Entfernung treffen, und aus diesem Grunde Asymptoten heißen. Da die Asymptoten also durch den Mittelpunkt gehn, und zur Querare unter einem Winkel geneigt sind,

beffen tang  $=\pm\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$  ift, so ift ihre Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

§. 246. Es fei nun erforberlich, bie Lage ber Afpmptoten zu finden, wenn die Syperbel auf irgend zwei conjugirte Diameter bezogen ift.

Dazu ift nur nothig, ben Durchschnitt irgend eines Diameters

$$y = ax \dots (1)$$

mit ber Spperbel

$$a^{2}y^{2} - b^{2}x^{2} = -a^{2}b^{2} \dots (2)$$

zu finben.

Eliminist man y and (1) unb (2), so ist
$$(a^{12}a^2 - b^{12})x^2 = -a^{12}b^{12};$$
b. b. 
$$x = \pm \frac{a'b'}{\sqrt{b'^2 - a'^2a^2}};$$
and 
$$y = \pm \frac{a'b'a}{\sqrt{b'^2 - a'^2a^2}}.$$

Solange nun  $b'^2 > a'^2a^2$ , ober  $a < \pm \frac{b'}{a'}$  ist, trifft ber Diameter die Kurve; wenn aber  $a = \pm \frac{b'}{a'}$  so wird ber Diameter eine Usymptote.

Wenn baher burch P (Fig. 82.) bie Linie Ee gezogen wird, gleich und parallel mit Dd, und CE, Ce gezogen werden, so werden bie Linien CEX' und CeY'
Aspmptoten sein.

Die Gleichung für CX' ist 
$$y = \frac{b'}{a'}x$$
, und die für CY' ist  $y = \frac{-b'}{a'}x$ .

§. 247. Zufat 1. Da Ee bie Superbel in P berfihrt (211.), so folgt, daß ber Theil ber Tangente, welcher zwischen den Afpuptoten liegt, im Berührungspuntte halbirt ift.

S. 248. Jusat 2. Wenn Pn, PN parallel zu CX', CY' gezogen werden, so ist en = nC, und EN = NE, da eP = PE.

§. 249. Die Gleichung ber Afpmptoten tann aus ber für die Kurve abgeleitet werben; benn man hat

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x^2 - a'^2}$$

worin y die Ordinate für die Hyperbel, und x die zugeshbrige Abscisse ist. Als nun die Gestalt der Hyperbel aus ihrer Gleichung abgeleitet wurde, wurde gezeigt, daß für jeden Werth von x, wie groß er immer sein mag, auch zwei gleiche Werthe für y mit entgegengesetzten Zeichen sich ergeben. Wird x daher unendlich groß angenommen, so wird die Ordinate der Kurve, mit der der Alspmptoten übereinstimmen.

Entwidelt man baber in ber obigen Gleichung ben Werth von y, fo hat man

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x \left( 1 - \frac{a'^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$= \pm \frac{b'}{a'} x \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a'^2}{x^2} - \dots \right)$$

$$= \pm \frac{b'}{a'} x \mp \frac{a'b'}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots$$

Setze x == 0, bann verschwinden alle Glieber, welche x im Renner enthalten, und man bat

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

welches bie gesuchte Gleichung ift.

S. 260. Die Afpmptote fann angesehn werben als eine Langente ber Spperbel an einen Punkt in unenblicher Entfernung.

Denn die Gleichung ber Laugente an irgend einen Punkt (x', y') ift

$$a'^{2}yy' - b'^{2}xx' = -a'^{2}b'^{2},$$
ober
$$y = \frac{b'^{2}}{a'^{2}} \cdot \frac{x'}{y'} x - \frac{b'^{2}}{y'} \cdot \dots \cdot (1),$$
mun
$$y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x'^{2} - a'^{2}}.$$

Nun fege x' unendich groß, bann verschwindet a'2, verglichen mit x'2;

baher 
$$y' = \pm \frac{b'}{a'} x'$$
,

ober ba

baher burch Substitution in (1) ber Gleichung ber Tangente, wird fie, wenn ber Punkt (x', y') unendlich entfernt ist,

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x \pm \frac{a'b'}{x'},$$
$$\frac{a'b'}{x'} = 0,$$
$$y = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

welches die Gleichung ber Asymptote ift: woraus die Bahrheit bes Sages folgt.

5. 251. Wenn irgend eine Schne der hyperbel verlängert wird, bis fie ben Afpmptoten begegnet, fo find die Theile zwischen ber Kurve und ben Afpmptoten gleich. (Fig. 82.)

Sete, die Sebne Qq sei verlängert, bis fie den Afpmptoten in R, r begegnet, zu beweisen, daß

$$QR = qr.$$

Halbire Qq burch ben Diameter CX, und ziehe CY als conjugirten Diameter; bann ift die Gleichung ber Hypperbel

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x'^2 - a'^2}, \dots$$
 (1)

und ber Afymptoten (246.)

$$y = \pm \frac{b'}{a'} \times \dots (9).$$

Nun hat man für dieselbe Absciffe CM aus (1)
MQ = Mq,

und aus (2)

MR = Mr.

beshalb burch Subtraction

$$RQ = rq$$

wie zu beweisen war.

aber 
$$MR^2 = \frac{b^{\prime 2}}{a^{\prime 2}} x^2$$
,  
und  $MQ^2 = \frac{b^{\prime 2}}{a^{\prime 2}} (x^2 - a^{\prime 2})$ ;

b. b. 
$$MR^2-MQ^2 = \frac{b'^2}{a'^2} \{x^2-x^2+a'^2\}$$
  
=  $b'^2 = CD^2$ ;

also  $QR \cdot Qr = CD^2$ .

§. 253. Die Gleichung ber Spperbel, bezogen auf bie Ufymptoten, ju finden. (Fig. 82.)

Es sei P irgend ein beliebiger Punkt in ber Sppersbel; ziehe CP, und die conjugirten Diameter Dd; burch P ziehe EPe gleich und parallel zu Dd; ziehe CE, Ce,

: und perfungere fie unbegrungt nach X' und Y', so find CX' und CY' Afpmptoten. Dimmt man biefe als Cp= ordinaten Alren, fo ift nun erforderlich, die Gleichung ber Spperbel zu finden.

Won P ziehe PN, Pn parallel zu CX', CY' und fege CN = x, NP = y, Winkel X'CY' = 29.

Dann iff CE = 2CN = 2x (248.),

-Ce = 2Cn = .2y;

baher  $CE \cdot Ce = 4xy \cdot \dots \cdot (1);$ aber CE · Ce sin 29 = bem boppelten Dreied ECe

= bem boppelten Parallelogramm

 $= 2a'b' \sin y = 2ab (231);$  **b. b. c c c e**  $= \frac{2ab}{\sin 29};$ 

 $xy = \frac{2ab!}{4\sin 29} = \frac{ab}{4\sin 9\cos 9}$ hieraus

Nun ift tang  $\mathfrak{s} = \frac{\mathbf{b}}{2}$ ;

 $\frac{b^2}{a^2} = \tan^{29} = \frac{\sin^2 9}{\cos^2 9} = \frac{\sin^2 9}{1 - \sin^2 9}$ 

 $b^2 - b^2 \sin^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta;$ 

b. b.  $\sin 9 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Auf abuliche Art  $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 

baher burch Substitution in (2) .

$$xy = \frac{ab}{4ab} (a^2+b^2)$$

$$xy = \frac{a^2+b^2}{4a^2}.$$

Ober bezeichnet man diese Große burch m2, so ist xy = m2, welches bie gesuchte Gleichung ift.

S. 254. Wenn die Gleichung ber Spperbel burch ihre Uren gegeben ift, die Gleichung berfelben, auf ihre Afpmptoten bezogen, zu finben. (Fig. 83.)

Es sei CX die Querare, CX', CY' die Asymptoten, P irgend ein Punkt in der Hyperbel; ziehe die Senkrechte PM auf CX, und ziehe PN parallel zu CY'.

Setze CM = x, MP = y; CN = x', NP = y', und X'CY' = 29. Run ift erforderlich, aus ber Gleischung zwischen x und y,

$$a^{2}y^{2} - b^{2}x^{2} = -a^{2}b^{2}$$
 ..... (1),

bie zwischen x' und y' abzuleiten.

Bon N und P ziehe Nm und Pn parallel zu PM und AM beziehungsweife.

Dann ist  $y = PM \Rightarrow Nm - Nn$   $= NC \cdot \sin NCm - NP$   $\sin NPn,$   $= (NC - NP) \sin NCm,$   $y = (x' - y') \sin 9.$ Unfigleiche Weise  $x = (x' + y') \sin 9;$ baher  $a^2y^2 = (x'-y')^2a^2 \sin^2 9 = (x'-y')^2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$ 

$$\begin{cases} x' + y' \end{pmatrix}^{2} = (x' + y')^{2} \begin{cases} a^{2} + b^{2} \end{cases}$$

baher 
$$a^2y^2-b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\{(x'-y')^2-(x'+y')^2\}$$
  
=  $-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} 4x'y';$ 

aber  $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2;$ 

daher

baher 
$$4x'y' = a^2 + b^2$$
,
ober  $x'y' = \frac{a^2 + b^2}{\lambda}$ 

welches (253.) bie gesuchte Gleichung ift.

§. 255. Wenn bie Afymptoten als Aren genommen werben, bie Gleichung ber Tangente an einen gegebenen Punkt (x', y') zu finben.

Nimmt man einen andern Punkt (x", y") in ber Hopperbel, nahe bem ersten, so ist die Gleichung einer Lisnie burch (x', y') und (x", y")

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - y') \dots (1);$$

aber ba biefe Puntte in ber Spperbel liegen, fo hat man

$$x'y' = m^2$$
  
und,  $x''y'' = m^2$ ;  
daher  $x''y'' - x'y' = 0$ ;  
b. h.  $y'' = \frac{x'y'}{x''}$ ;  
d. h.  $y'' - y' = \frac{x'y'}{x''} - y'$ 

$$=-\frac{y'}{x''}(x''-x');$$

also 
$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = -\frac{y'}{x''}$$

deshalb durch Substitution in (1) wird die Gleichung der Secante

$$y - y' = -\frac{y'}{x''} (x - x').$$

S. 254. Wenn die Gleichung ber Spperbel burch ihre Uren gegeben ift, die Gleichung berfelben, auf ihre Ufpmptoten bezogen, zu finben. (Fig. 83.)

Es sei CX die Querare, CX', CY' die Asymptoten, P irgend ein Punkt in der Hyperbel; ziehe die Senkrechte PM auf CX, und ziehe PN parallel zu CY'.

Setze CM = x, MP = y; CN = x', NP = y', und X'CY' = 29. Run ift erforderlich, aus ber Gleichung awischen x und y,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \dots (1),$$
 bie awischen x' und y' abzuleiten.

Von N und P ziehe Nm und Pn parallel zu PM und AM beziehungsweise.

Dann ist y = PM = Nm - Nn=  $NC \cdot \sin NCm - NP$   $\sin NPn$ ,

=  $(NC - NP) \sin NCm$ ,  $y = (x' - y') \sin 9$ .

Unf gleiche Weise  $x = (x' + y') \sin 9;$ baher  $a^2y^2 = (x'-y')^2a^2 \sin^2 9 = (x'-y')^2\frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$ baher  $a^2y^2 = (x'+y')^2\frac{a^2}{a^2+b^2}\{(x'-y')^2-(x'+y')^2\}$ =  $-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\{x'y';$ aber  $a^2y^2 - b^2x^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$ baher  $a^2y^2 - b^2x^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2};$ 

baber-

$$4x'y'=a^2+b^2,$$

ober

$$x'y' = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

welches (253.) die gesuchte Gleichung ift.

§. 255. Wenn bie Afymptoten als Aren genommen werben, bie Gleichung ber Tangente an einen gegebenen Punkt (x', y') zu finben.

Nimmt man einen andern Punkt (x", y") in ber Spiperbel, nahe bem ersten, so ist die Gleichung einer Lisnie durch (x', y') und (x", y")

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - y') \dots (1);$$

aber ba biefe Puntte in ber Syperbel liegen, fo bat man

$$x'y' = m^2$$

nup

$$x''y'' = m^2;$$
  
 $x''y'' - x'y' = 0;$ 

baher .

$$y'' = \frac{x'y'}{x'};$$

b. b.

$$y''-y'=\frac{x'y'}{x''}-y'$$

 $=-\frac{y'}{x''}(x''-x');$ 

also

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{y'}{x''}$$

deshalb durch Substitution in (1) wird die Gleichung der Secante

$$y-y'=-\frac{y'}{x''}(x-x').$$

 $a = \pm 2\cos 3 \sqrt{x'y'}$ 

und  $b = \pm 2\sin 9 \sqrt{x'y'}$ ,

daher ist die Große ber Queraxe und ber conjugirten Axe gefunden.

## Bon ben Regelschnitten im Allgemeinen.

## Erftes Rapitel.

Bon ber allgemeinen Gleichung ber brei Rurven.

§. 260. Die Gletchung eines Regelschnittes aus ber allgemeinen Erklarung abzuleiten.

Berfahrt man, wie in ber Ellipse und Sopperbel (§. 89. und 172.), so kann gezeigt werben, daß bie ver- langte Gleichung ift

 $y^2 = 2m (1+e) \cdot x - (1-e^2) \cdot x^2$ . If e = 1, so if  $y^2 = 4mx$ , die Gleichung der Paradel e < 1,  $y^2 = 2m (1+e) \cdot x - (1-e^2) \cdot x^2$ , die Gleichung der Ellipse, und e > 1,  $y^2 = 2m (1+e) \cdot x + (e^2-1) \cdot x^2$ , die Gleichung der Hyperbel.

§. 261. Es ist besonders bei jeder Kurve gezeigt worden, daß die Gleichung dieselbe Form behalt, die Aren seien rechtwinklicht ober schief; daher, wenn irgend zwei

conjugirte Diameter bie Coordinaten Uren find, fo ift bie allgemeine Gleichung eines Regelschnittes

$$y^2 = mx + nx^2,$$

n = 0 in ber Parabel, negativ in ber Ellipse, und positiv in ber Hyperbel.

hieraus tann leicht gezeigt werben,

(1) daß die Tangente an einem gegebenen Punkte (x', y') ist

$$y - y' = \frac{m + 2nx'}{2y'} (x - x').$$

(2) Daß wenn y = ax + s die Gleichung irgend einer Sehne ift, die Gleichung fur ben halbirenben Diameter ift

$$y = \frac{n}{e} x + \frac{m}{2e}$$

und (3) baß, wenn y = ax + s die Gleichung eines Diametere ift,

$$y = \frac{n}{4} x + x'$$

bie Gleichung bes zugehbrigen conjugirten Diameters ift.

§. 262.. Die Polar=Gleichung eines Regelichnittes zu finden. (Fig. 84.)

Es fei EQ bie Directrix, Pi irgend ein Pankt ber Rurve, PM, PQ Sentrechte auf bie Ure und Directrix.

Setze SP = r, AS = m, und Wintel ASP = ...
Dann SP = e · PQ nach ber Ertlarung,

ober 
$$r = e\left(\frac{m}{e} + x\right)$$
  
 $= e\left\{\frac{m}{e} + m - r \cos a\right\}$   
 $= m + em - er \cos a$ 

baher  $r = \frac{m(1+e)}{1+e\cos \omega}$ , welches die verlangte Gleichung ist.

§. 263. Zusat. Wenn e=1, so ist  $r=\frac{2m}{1+\cos \omega}$  welches die Gleichung der Parabel ist (64.).

Wenn e < ober > 1,  $r = \frac{m(1+e)}{1+e\cos\omega}$  welches die Gleichung für die Ellipse ober Hyperbel (115.) und (198.) ist.

§. 264. And ben beiben Gleichungen  $y^2 = mx + nx^2$ und  $r = \frac{m (1 + e)}{1 + e \cos \theta},$ 

konnen bie Eigenschaften eines Regelschnittes im Allgemeinen, genau auf bieselbe Weise, auf welche aus der, einer jeden Aurve zugehörigen Gleichung diesels ben besonders entwickelt wurden, abgeleitet werden.

## Zweites Rapitel. Bon ben Schnitten bes Regels.

§. 265. Erklarung. Es sei C ein fester Punkt über ber Ebene einer gegebenen Rreisstäche BED, und BCZ eine unbegränzte gerade Linie, die immer durch C geht, während ihr Gränzpunkt B sich um die Kreislinie BED bewegt, so wird BCZ burch ihre Umbrehung einen Korper beschreiben, der ein Regel heißt. (Fig. 85. a. b.)

Der Punkt C heißt ber Scheitel, ber Kreis BED bie Grunbflache, und die Linie CO, welche ben Scheitel mit bem Mitelpunkt ber Grunbflache verbindet, die Are bes Regels.

Der Regel heißt ein geraber, ober ein schiefer, je nachdem die Ure sentrecht ober geneigt, zu ber Chene ber Grundflache ift.

Die Oberfiache eines Regels ift aus zwei abnlichen Theilen gebildet, ber eine unterhalb, ber andere oberhalb bes Scheitels, jeder dieser Theile heißt eine entgegens gefette Regeloberflache \*).

Aus ber Art, wie ein Regel entsteht, ift flar, baß jeber Schnitt parallel mit ber Grunbflache ein Rreis ift.

§. 266. Die Beschaffenheit ber Rurve gu finden, die fich burch ben Durchschnitt bes geraben Regels mit einer Chene ergiebt. (Fig. 86.)

Es sei APp bie durch den Durchschnitt eines geras den Regels mit einer Ebene gebildete Kurve; durch die Are CO lege eine Ebene BCD senkrecht zu der gegebenen Sbene, dann wird ihr Durchschnitt die gerade Linie Aa sein. In Aa nimm irgend einen beliedigen Punkt M, und durch diesen lege eine Sbene parallel zur Grundsstäche, dann wird ihr Durchschnitt mit dem Regel und der gegebenen Sbene beziehlich, der Kreis NPQ und die gerade Linie MP sein, welche, da sie senkrecht zu Aa und NQ ist, eine gemeinschaftliche Ordinate beider Kurz ven ist.

<sup>\*)</sup> Entgegengesette Regel = Dberfidche ift bas fur ben Regel, was ein Arm fur eine Rurve ift.

Nimm Aa als die Are ber x, und AY sentrecht zu Aa, als die Are ber y; seize AM == x, MP == y; auch nimm AC == 3, Winkel BCD == a, und Winkel CAa == 9.

Dann ist 
$$\frac{Aa}{AC} = \frac{\sin ACa}{\sin AaC} = \frac{\sin a}{\sin (a+9)}$$
; baher  $Aa = \frac{\sin a}{\sin (a+9)}$  ?;

$$Ma = Aa - x = \frac{5 \sin a}{\sin(a+2)} - x \cdot .... (1).$$

Mun, ben Eigenschaften bes Kreises gemäß,  $MP^2 = y^2 = NM \cdot MQ$ ;

aber NM = MA 
$$\cdot \frac{\sin NAM}{\sin ANM} = x \frac{\sin CAa}{\cos NCM}$$
  
=  $\frac{x \sin 9}{a}$ ,

and MQ = Ma 
$$\frac{\sin AaC}{\sin MQa}$$
 = Ma  $\frac{\sin (x+9)}{\sin NQC}$   
=  $\left\{\frac{x \sin x}{\sin (x+9)} - x\right\} \frac{\sin (x+9)}{\cos x}$ ;

baber burch Substitution

$$y^{2} = \frac{x \cdot \sin 9}{\cos \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin (\pi + 9)}{\cos \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3 \sin \pi}{\sin (\pi + 9)} - x \right\}$$

$$= \frac{\sin 9}{\sin 9} \left\{ 3 \sin \pi + 3 \sin (\pi + 9) x^{2} \right\}$$

$$= \frac{\sin 9}{\cos^2 \frac{\kappa}{2}} \left\{ 1 \sin \kappa \cdot x - \sin (\kappa + 9) x^2 \right\},\,$$

welches (261.) bie Gleichung eines Regelschnittes iff.

§. 267. Benn bir fcneibenbe Gbene parattel ift ber erzengenben Linie CD, fo ift ber Schnitt eine Parabel.

Wenn die schneibende Ebene parallel CD ift, so bat man in ber obigen Gleichung

 $a + 9 = \pi$ , deshalb  $\sin (a + 9) = \sin \pi = 0$ ; auch  $\sin 9 = \sin (\pi - \pi) = \sin \pi$ , deshalb wird die Gleichung.

$$y^{2} = \frac{\sin^{2} \alpha}{\cos^{2} \alpha} \cdot x = 4 \sin^{2} \frac{\alpha}{2} \cos^{2} \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^{2} \frac{\alpha}{2}$$

 $=4\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot x$ 

welches die Gleichung einer Parabel ift, beren Parameter

$$= 4 \cdot \sin^2 \frac{a}{2}.$$

§. 268. Jusatz. Wenn die Seine durch ben Scheitel bes Regels geht, ist b = 0, und die Gleichung für den Schnitt wird  $y^2 = 0$ , welches die Gleichung der Linie CD ist.

§. 269. Wenn die schneibenbe Gbene nur bie eine ber entgegengesetten Oberflachen bes Regels trifft, ift ber Schnitt eine Ellipse. (Fig. 86.)

Es treffe bie Ebene CB und CD, dann ist a + 9 < x, und deshalb sin (a + 9) positiv; beshalb ist die Gleichung des Schnittes

$$y^2 = \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \cdot \frac{\alpha}{2}} \left\{ \vartheta \sin \alpha \cdot x - \sin (\alpha + \vartheta) x^2 \right\},$$

welches die Gleichung ber Ellipfe ift.

§. 270. Bufat 1. Den Parameter und bie Aren zu finden.

Bergleicht man bie obige Gleichung mit

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ 2ax - x^2 \right\},$$

ober mit  $y^2 = \frac{2b^2}{a} \times - \frac{b^2}{a^{12}} \times \frac{2}{a}$ 

fo hat man 
$$\frac{2b^2}{a}$$
, ober ber Parameter  $=\frac{\delta \sin a \cdot \sin 3}{\cos^2 \frac{a}{3}}$ 

$$= 2\delta \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \sin \theta \dots (1),$$

and 
$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin 9 \cdot \sin (a + 9)}{\cos^2 \frac{a}{2}} \cdot \cdots \cdot (2);$$

beshalb, wenn be eliminirt wird

$$a = \frac{3 \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + 9)};$$

 $b^2 = \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot \tan \frac{a}{2} \sin 9$ 

$$= \frac{3 \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + 9)} \cdot 3 \tan \frac{\alpha}{2} \sin 9$$

$$= \delta^{2} \cdot \sin^{2} \frac{sin 9}{2} \cdot \frac{sin 9}{sin (s+9)};$$

$$b = \delta \cdot \sin \frac{s}{2} = \frac{sin 9}{sin (s+9)}.$$

baher

§. 271. Bufat 2. Wenn die Seene burch ben Scheitel geht, fo ift 1 = 0, und die Gleichung wird

$$y^{2} = -\frac{\sin (a+9) \sin 9}{\cos^{2} \frac{\pi}{2}} x^{2},$$

welches die Gleichung bes Punktes C ift, da ber Gleischung nun genügt werden kann, wenn man x=o, y=o setzt.

§. 272. Wenn die schneibende Gbene beibe entgegengesetzte Regel=Oberflachen trifft, so ift ber Schnitt eine Syperbel.

In diesem Falle ist . + 9 > -, deswegen sin (. + 9) negativ, die Gleichung des Schnittes ist

$$y^{2} = \frac{\sin 9}{\cos^{2} \cdot \frac{a}{2}} \left\{ \sin a \cdot x + \sin (a+9) x^{2} \right\},$$

welches bie Gleichung ber Syperbel ift.

Der Parameter und die Aren ber Hyperbel konnen auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie in der Ellipse.

§. 273. Wenn die Chene burch ben Scheifel geht, so ift d = 0, und die Gleichung wird

$$y^2 = \frac{\sin 9}{\cos^2 \frac{\pi}{2}} \cdot \sin (\pi + 9) x^2;$$

b. b. 
$$y = \pm \frac{\sqrt{\sin 9 \cdot \sin (n+9)}}{\cos \cdot \frac{a}{2}} x$$

welches die Gleichungen für CB, CD find; hiernach past in diesem Falle ber Schnitt für die zwei erzeugens ben Linien bes Regels.

Es ergiebt fich baber aus ber vorstehenden Unterfuchung, baß wenn ein gerader Regel burch eine Ebene geschnitten wird, ber Schnitt ift

- (1) eine Parabel, wenn bie Cbene ber erzeugen= ben Linie parallel ift.
- (2) Eine Ellipse, wenn die Ebene bloß eine bon ben entgegengesetzten Oberffachen bes Regels schneibet.
- (3) Gine Sopperbel, wenn die Chene beide entgegengesetzte Regel-Dberflachen schneibet.
- §. 274. Die Beschaffenheit einer Rurve zu finden, welche sich burch ben Schnitt eines ichiefen Regels mit effer Chene ergiebt. (Fig. 87.)

Es sei APp bie Rurve, die burch ben Schnitt eines schiefen Regels mit einer Ebene gebilbet wird.

Die Construction ist wie vorber, nur daß die Linie MP nicht langer sentrecht ist zu Aa und NQ, sondern nur zu der letzteren; wir werden daher die Linien Aa und AY als schiefe Axen annehmen, die letztere parallel zu MP.

Here we worker, 
$$Aa = \frac{x \sin \alpha}{\sin(\alpha + 9)}$$
,

 $Ma = \frac{x \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + 9)} - x \cdot \dots (1)$ 

and  $y^2 = NM \cdot MQ$ ;

 $NM = x \frac{\sin 9}{\sin R}$ ,

unb

$$MQ = Ma \cdot \frac{\sin (\alpha + 9)}{\sin (\alpha + B)},$$

$$= \frac{\sin (\alpha + 9)}{\sin (\alpha + B)}$$

$$\left\{\frac{3 \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + 9)} - x\right\};$$

baher 
$$y^2 = \frac{\sin 9}{\sin B \cdot \sin (a+B)}$$

\{\delta \cdot \text{sin } \alpha \cdot \text{x} - \sin (\alpha + \delta) \text{ x}^2\},
welche, je nachdem die gegebene Ebene parallel zu CD
ist, oder nur eine, oder beide Regel-Oberstächen schneidet,
die Gleichung der Parabel, Ellipse, oder Hyperbel, bezogen auf schiefe Uren ist.

§. 275., Bu finden, in welchen Fallen ber Schnitt ein Kreis if

Bringt man obige Gleichung auf bie Form sin 9 · sin (4+9) (8 · sin 4

$$y^{2} = \frac{\sin \theta \cdot \sin (\alpha + \theta)}{\sin \theta \sin (\alpha + \theta)} \left\{ \frac{\delta \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \theta)} x - x^{2} \right\},$$

fo ift flar, daß ber Schnitt ein Rreis ift, wenn ber Coef- ficient

$$\frac{\sin^{9} \cdot \sin^{4}(\alpha+9)}{\sin^{8} \cdot \sin^{4}(\alpha+B)} = 1,$$

oder  $\sin 3 \cdot \sin (a+3) = \sin B \cdot \sin (a+B)$ , oder  $\cos 4 - \cos (a+29) = \cos 4 - \cos (a+2B)$ , b. b.  $\cos (a+2^9) = \cos (a+2B)$ , b. b.  $a+2^9 = a+2B \dots (1)$ ober  $= 2^{\pi} - (a+2B) \dots (2)$ . Erftens, wenn  $a+2^9 = a+2B$ 

Erstens, wenn \* + 29 = \* + 2B 9 = B,

b. h. wenn bie Chene parallel mit ber Grund= flache ift, fo ift ber Schnitt ein Rreis.

3weitens, wenn  $a + 29 = 2\pi - (a + 2B)$ , bann  $2a + 29 + 2B' = 2\pi$ , ober  $a + 9 + B = \pi = a + D + B$ ; b. h. 9 = D;

hiernach also, wenn ber Winkel CAX = CDB, so ist ber Schnitt auch ein Kreis. Dieser heißt ber subcontraire (antiparallele) Schnitt bes Kegels.

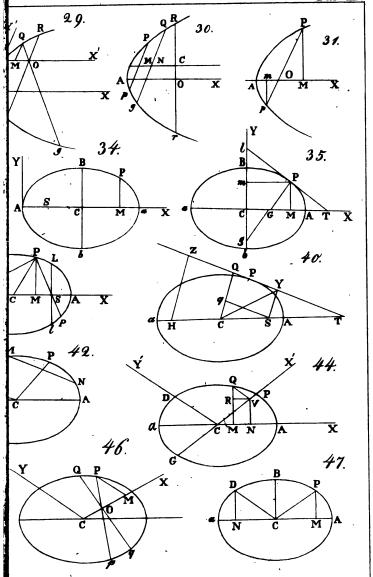
Gebrudt bei Ferdinand Rietad.

X

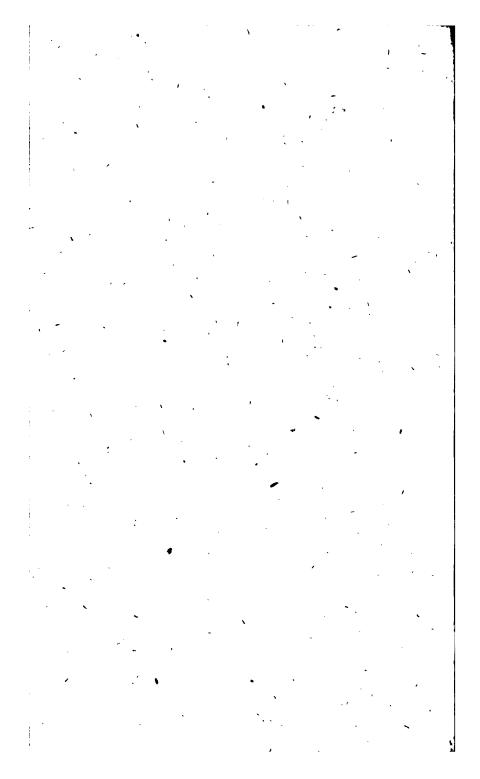
M

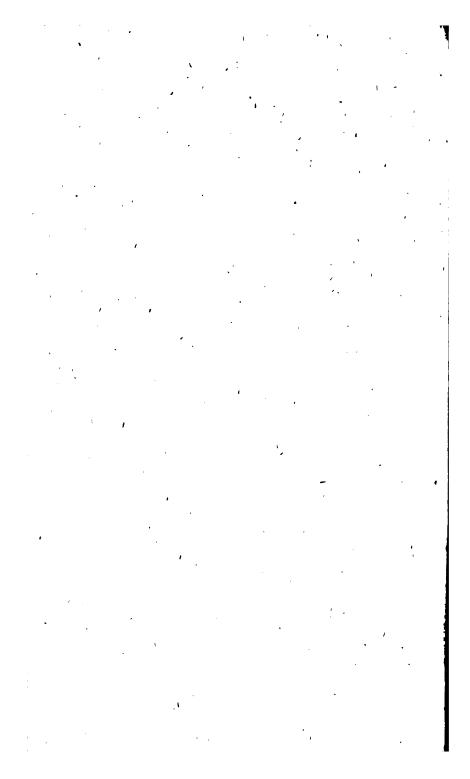
(JN/), oF





ANIT.





68.

